

Exo 1. soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ c^0 .
 $\uparrow$
 ouvert de $\mathbb{C}$

et soit $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ c^1 .

1. soit $z \in U$.

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

$$L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

2. montrons que $\int_{\gamma} f(z) dz \leq \pi \cdot L(\gamma)$.

soit $z \in U$.

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t)) \gamma'(t)| dt$$

$$\leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt$$

$$\leq \max \{ |f(\gamma(t))| \mid t \in [a, b] \} \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

$$\uparrow$$

$$=: L(\gamma)$$

$$\leq \pi L(\gamma).$$

ex 02. soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ c.o.
 $\uparrow$
ouvert de $\mathbb{C}$

montrons que si f admet une primitive holo

$$\Rightarrow \oint_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad \forall \gamma \in U.$$

soit $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holo / $F' = f$.

et soit $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ un lacet. $\Rightarrow$

$F \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable et

$$(F \circ \gamma)'(t) = F'(\gamma(t)) \gamma'(t) \quad \forall t \in [a, b]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \oint_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 0 \\ &\quad \uparrow \\ &\gamma \text{ un lacet : } \gamma(b) = \gamma(a). \end{aligned}$$

ex03. soit $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$ un lacet, C^1 .

soit $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0,1])$.

1. soit $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0,1])$. et soit $z \in \gamma([0,1])$.

$$\text{Ind}_{\gamma}(a) := \int_{\gamma} \frac{1}{z-a} dz \cdot \frac{1}{2\pi i}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z-a} dz$$

2. Pour $t \in [0,1]$, on pose :

$$\phi(t) := \exp \left(\int_0^1 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-a} ds \right).$$

a. montrons que $t \mapsto \frac{\phi(t)}{\gamma(t)-a}$ est constante

sur $[0,1]$.

$\forall t \in [0,1]$. ϕ est dérivable et

$$\phi'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a} \exp \left(\int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-a} ds \right)$$

$\uparrow$
 $\phi(t)$

$$\Rightarrow \phi'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a} \cdot \phi(t), \quad \forall t \in [0, 1].$$

$t \mapsto \frac{\phi(t)}{\gamma(t) - a}$ est dérivable sur $[0, 1]$ et

$$\text{En posant } f(t) := \frac{\phi(t)}{\gamma(t) - a}, \quad \forall t \in [0, 1]$$

$$\begin{aligned} \text{on a : } f'(t) &= \frac{\phi'(t)(\gamma(t) - a) - \gamma'(t)\phi(t)}{(\gamma(t) - a)^2} \\ &= \frac{\gamma'(t)\phi(t) - \gamma'(t)\phi(t)}{(\gamma(t) - a)^2} \end{aligned}$$

$$= 0 \quad \forall t \in [0, 1]$$

done f est constante et $\forall t \in [0, 1]$

$$f(0) = f(t) = f(1).$$

$$f(0) = \frac{\phi(0)}{\gamma(0) - a} = \frac{\phi(1)}{\gamma(1) - a}$$

//  γ un laet.

$$\phi(0) = \phi(1)$$

$$b. \quad \forall t \in [0, 1]. \quad f(0) = f(t) = f(1)$$

//

$$\phi(0) = \phi(1).$$

$$\phi(0) = \exp \left(\int_0^0 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - a} ds \right)$$

$$= 1 \quad \text{et} \quad \phi(1) = \exp \left(\int_0^1 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - a} ds \right)$$

$$\Rightarrow \exp \left(\int_0^1 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - a} ds \right) = 1$$

$$\text{Comme } \exp c^0 \quad \forall s \in [0, 1] \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - a} ds = 2\pi i \mathbb{Z}$$

$$\text{or par déf, } \text{Ind}_\gamma(a) := \int_0^1 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - a} ds.$$

$$\Rightarrow \text{Ind}_\gamma(a) \in 2\pi i \mathbb{Z}.$$

3. montrons que $\text{Ind}_\gamma(a)$ est nul si $|a|$ est assez grand. (suffisamment).

Comme U est compacte $\Rightarrow \exists R > 0$ /

$$\gamma([0,1]) \subset D(0, R).$$

soit $a \in U_0$ (la composante connexe non bornée)
de U /

$|a| > R$. on a $z \mapsto \frac{1}{z-a}$ est holo sur

$D(0, R)$ qui est convexe $\Rightarrow$ elle admet

une primitive (thm de Cauchy) et

$$\int_\gamma \frac{1}{z-a} dz = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\text{Ind}_\gamma(a) = 0 \quad \text{et} \quad \text{Ind}_\gamma = 0$$

sur U_0 .

Exo 4 : Soit $U \subset \mathbb{C}$ connexe .

$$f : U \longrightarrow \mathbb{C} \quad ? \quad /$$

$$\operatorname{Im}(f(z)) = \operatorname{Re}(f(z))^2 \quad \forall z \in U.$$

1. montrons que si $\operatorname{Im}(f(z)) = \operatorname{Re}(f(z))^2, \forall z \in U$

$\Rightarrow$ en posant $u := \operatorname{Re}(f)$ et $v := \operatorname{Im}(f)$

$$(1 + 4u^2) \frac{\partial v}{\partial y} = (1 + 4u^2) \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\text{soit } z \in U. \text{ et } f : U \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto u(z) + i v(z)$$

$$\text{avec } u(z)^2 = v(z) \quad \forall z \in U. \quad (*)$$

les équations de Cauchy - Riemann $\Rightarrow$

$$\text{en posant } u_x := \frac{\partial u}{\partial x} \text{ et } \dots$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (=\Rightarrow) \quad \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

avec en dérivant (*).

$$\frac{\partial u(z)^2}{\partial z} = 2 u'(z) u(z) \quad \text{et}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}(z) = v'(z) = 2 u'(z) u(z) \quad .$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial u^2}{\partial x} = 2 u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \\ &= 2 u \cdot u_x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v_x = 2 u_x u \quad .$$

$$\begin{aligned} \text{et } \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial u^2}{\partial y} = 2 u u_y \\ &= 2 u_y u \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v_y = 2 u_y u \quad \text{donc on a :}$$

$$\begin{cases} 2 u_x u = v_x & (1) \\ 2 u_y u = v_y & (2) \end{cases}$$

$$(1) * (2) \Rightarrow 4 u^2 u_x u_y = v_x v_y$$

$$\text{avec } u_y = -v_x \Rightarrow 4 u^2 u_x = -v_y$$

$$\text{et } u_x = v_y$$

$$(1 + 4 u^2) v_y = 0 \quad .$$

$$4u^2 u_x u_y = v_x v_y$$

$$(1 + 4u^2) v_y = 0 \Rightarrow (1 + 4u^2) v_x = 0$$

↑

$$v_y = v_x$$

donc, $\forall z \in U$.

$$(1 + 4u^2) v_y = 0 = (1 + 4u^2) v_x.$$

2. En déduisons les fonctions cherchées.

Comme $1 + 4u^2$ ne s'annule pas sur U ,

$$\Rightarrow v_x \equiv 0 \equiv v_y \text{ sur } U \Rightarrow v = \text{cte}$$

sur U (convexe) $\Rightarrow$ les f^n qu'on

cherche sont donc les f^n de la

forme constantes $f(z) = a + ia^2 \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

Exos. soit $f: U \longrightarrow \mathbb{C}$ holo
 $\uparrow$
 ouvert connexe de $\mathbb{C}$
 et non vide.

$f \neq 0$ sur U .

1. montrons que $\forall \gamma$ laet de U ,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \text{Ind}_{f \circ \gamma}(0).$$

soit $f: U \longrightarrow \mathbb{C}$ et

$\gamma: [a, b] \longrightarrow U$ alors

$f \circ \gamma$ est dérivable (car f holo et $\gamma \in^1$)

sur $[a, b]$ et

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f'(\gamma(t)) \gamma'(t)}{f(\gamma(t))} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{(f \circ \gamma)'(t)}{f \circ \gamma(t)} dt$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{(f \circ \gamma)'(t)}{f \circ \gamma(t)} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{f \circ \gamma} \frac{1}{z} dz$$

$$= \text{Ind}_{f \circ \gamma}(0)$$

définition de l'indice.

2. soit $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$.

a. On suppose qu' $\exists g: U \rightarrow \mathbb{C}$ holo /

$$\forall z \in U, g(z)^n = f(z).$$

montrons que, $\forall \gamma$ lacet de U ,

$$\text{on a : } \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \in n\mathbb{Z}.$$

Soit $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ holo /

$$g(z)^n = f(z) \quad \forall z \in U \Rightarrow$$

$$g(z) \neq 0 \quad \forall z \in U. \quad \text{et si}$$

γ est un lacet de $U \Rightarrow$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{n g(z)^{n-1} g'(z)}{g(z)^n} dz$$

$$= \frac{n}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} dz$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ 1) \end{array} = n \underbrace{\text{Ind}_{\gamma \circ \gamma} (0)}_{\in \mathbb{Z}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \in n\mathbb{Z}$$

$\forall z \in U$ et γ lacet de U .

b. On suppose que $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \in n\mathbb{Z}$,

$\forall \gamma$ lacet de U . soit $z_0 \in U$ et $z \in U$.

(i) montrons que $h(z)$ ne dépend pas du choix du chemin γ_z reliant z_0 à z .

supposons que γ'_z soit un autre chemin de z_0 à $z \Rightarrow$ (par hypothèse) :

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma_z * (\gamma'_z)^{-1}} \frac{f'(w)}{f(w)} dw \in n\mathbb{Z}$$

$$\text{càd } \frac{1}{n} \int_{\gamma_z} \frac{f'}{f} - \int_{\gamma'_z} \frac{f'}{f} \in 2i\pi n\mathbb{Z}$$

$$\text{d'où } \frac{1}{n} \int_{\gamma_z} \frac{f'}{f} - \frac{1}{n} \int_{\gamma'_z} \frac{f'}{f} \in 2i\pi \mathbb{Z}$$

$$\text{et comme } e^{2i\pi k} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \exp \left(\frac{1}{n} \int_{\gamma_z} \frac{f'(w)}{f(w)} dw \right) = \exp \left(\frac{1}{n} \int_{\gamma'_z} \frac{f'(w)}{f(w)} dw \right)$$

ce que l'on voulait démontrer.

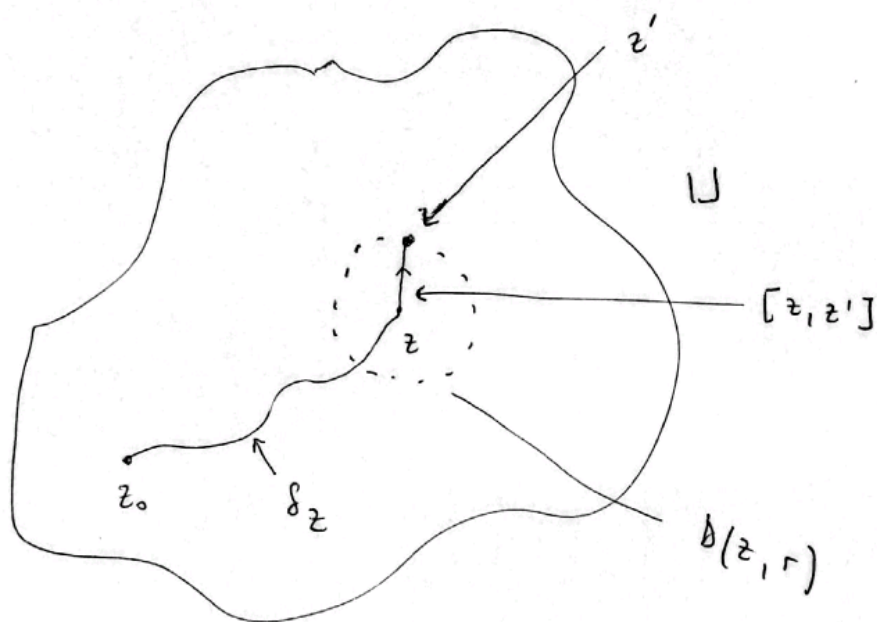
(ii). Expliquons pourquoi h est holo.

$$h(z) := \exp \left(\frac{1}{n} \int_{\gamma_z} \frac{f'(w)}{f(w)} dw \right).$$

soit $z \in U$. soit $r > 0$ / $D(z, r) \subset U$.

$\forall z' \in D(z, r)$, le chemin $\gamma_z \cup [z, z']$ est

Contenu dans U et va de z_0 à z' :



$$\text{donc } h'(z) = \exp \left(\frac{1}{n} \int_{\gamma_z \cup [z, z']} \frac{f'(w)}{f(w)} dw \right).$$

$$= \exp \left(\frac{1}{n} \int_{\gamma_z} \frac{f'(w)}{f(w)} dw + \frac{1}{n} \int_{[z, z']} \frac{f'(w)}{f(w)} dw \right).$$

$$h'(z) = \exp \left(\frac{1}{n} \int_{\gamma_z} \frac{f'(w)}{f(w)} dw \right) * \exp \left(\frac{1}{n} \int_{[z, z']} \frac{f'(w)}{f(w)} dw \right)$$



On a vu en cours que

$$k(z') := \int_{[z, z']} \frac{f'(w)}{f(w)} dw \text{ est}$$

sur le disque $D(z, r)$, une primitive holo

$$\text{de } \frac{f'}{f} \Rightarrow h(z') = h(z) \exp \left(\frac{1}{n} k(z') \right).$$

$$\Rightarrow h(z') = h(z) \exp \left(\frac{1}{n} k(z) \right) \cdot \frac{1}{n} \quad \forall$$

$$z' \in D(z, r) \quad \text{avec } k \cdot f^n \text{ holo}$$

$$\Rightarrow h \text{ est holo sur } D(z, r) \text{ avec}$$

$$h'(z) = h(z) \frac{1}{n} k'(z) \exp\left(\frac{1}{n} k(z)\right).$$

$$= h(z) \exp\left(\frac{1}{n} k(z)\right) \cdot \frac{1}{n} \frac{f'(z)}{f(z)}$$

└──┘



||

$h(z)$

$$\Rightarrow h'(z) = h(z) \cdot \frac{1}{n} \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

(iii). On considère la fonction $z \mapsto \frac{h(z)^n}{f(z)}$

définie et hol. sur D .

sa dérivée est :

$$\frac{n h'(z) h(z)^{n-1} f(z) - h(z)^n f'(z)}{f(z)^2}$$

$$= \frac{h(z)^n f'(z) - h(z)^n f'(z)}{f(z)^2}$$

$$= 0$$

donc cette fonction est constante sur U

(U est connexe) $\Rightarrow$ au point z_0 :

$$h(z_0) = 1 \quad (\text{par définition de } h)$$

$$\Rightarrow \frac{h(z)^n}{f(z)} = \frac{1}{f(z_0)} \quad \forall z \in U.$$

$$\text{ou encore } h(z)^n f(z_0) = f(z) \quad \forall z \in U.$$

Il suffit alors de choisir une racine- n -ième

w de $f(z_0)$ et de poser

$$g(z) := wh(z) \quad \forall z \in U$$

pour obtenir une fonction $g: U \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$g(z)^n = f(z) \quad \forall z \in U.$$