

Sujet : Partitions d'un entier

TER

Encad : Cécile Dartyge Etu : Yéro Diamanka

Master M1 Math & Appli – 2025/26

Introduction

Une *partition* d'un entier n est une suite décroissante d'entiers

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_m \geq 1$$

telle que $n = a_1 + \cdots + a_m$. Par exemple, $(4, 3, 3, 2, 1, 1, 1)$ est une partition de $15 = 4 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1$.

On note $p(n)$ le nombre de partitions de l'entier n . Ainsi $p(5) = 7$:

$$\begin{aligned} 5 &= 4 + 1 \\ &= 3 + 2 \\ &= 3 + 1 + 1 \\ &= 2 + 2 + 1 \\ &= 2 + 1 + 1 + 1 \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1. \end{aligned}$$

Objectifs du TER

On propose d'étudier diverses propriétés relatives à $p(n)$ avec des méthodes analytiques et combinatoires.

1. Diagramme de Ferrer

Une partition peut être représentée par un diagramme, le *diagramme de Ferrer*. À partir de ce diagramme, on peut démontrer de belles propriétés combinatoires.

2. Séries génératrices

Les séries génératrices jouent un rôle fondamental dans la théorie des partitions. La série associée aux partitions est formellement définie par

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} p(n) x^n.$$

Une première étape importante consistera à établir la **formule d'Euler** :

$$F(x) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^m}, \quad |x| < 1.$$

3. Formule pentagonale d'Euler

On étudiera ensuite la formule pentagonale d'Euler, qui décrit les coefficients de la série génératrice inverse de F :

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1 - x^m) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a(n) x^n.$$

On en déduira une formule de récurrence pour $p(n)$, en étudiant les preuves analytiques et combinatoires.

4. Formule asymptotique

Hardy et Ramanujan ont établi en 1918 le comportement asymptotique de $p(n)$:

$$p(n) \sim \frac{e^{\pi\sqrt{2n/3}}}{4n\sqrt{3}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Dans ce TER, on se propose d'établir la version plus faible suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log p(n)}{\sqrt{n}} = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Sources

- T.M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1986. [p. 306–316]
- Hua Loo Keng, *Introduction to Number Theory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1982. [p. 199–204]