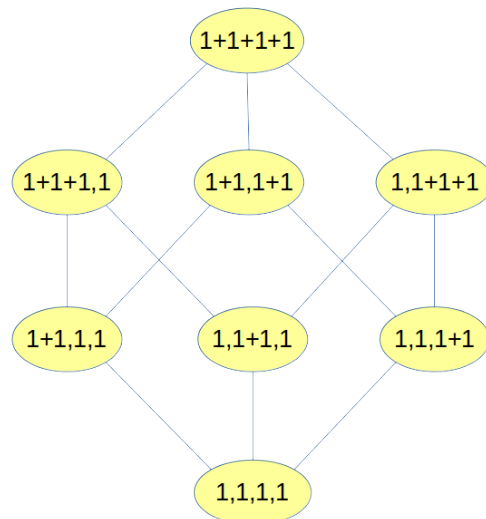


Travaux Encadrés de Recherche

Partitions d'un entier



Yéro Diamanka

Sous la direction de la professeure Cécile Dartyge

Mai 2026

*"La théorie des nombres occupe parmi les disciplines mathématiques une position idéalisée analogue à celle qu'occupent les mathématiques elles-mêmes parmi les autres sciences."
Jürgen Neukirch (1937 – 1997)*

Remerciements.

Je tiens à remercier chaleureusement Cécile Dartyge, professeure de mathématiques à l'Université de Lorraine, pour avoir accepté d'encadrer ce travail, pour ses conseils précieux et ses relectures attentives, mais aussi pour m'avoir fait découvrir la théorie des nombres, une discipline des mathématiques que je souhaite explorer davantage.

Table des matières

Introduction	4
1 Partitions et diagrammes de Ferrers	5
1.1 Définitions et premières propriétés	5
1.2 Diagrammes de Ferrers	6
1.3 Partition conjuguée	7
1.4 Le théorème d'Euler	8
1.5 Généralisation : le théorème de Glaisher	9
2 Séries génératrices et formule d'Euler	11
2.1 Séries formelles et séries génératrices	11
2.2 Produits infinis	12
2.3 La série génératrice de $p(n)$ et la formule d'Euler	13
2.4 Applications : partitions restreintes	14
2.5 Preuve analytique du théorème de Glaisher	17
2.6 Une identité remarquable : le carré de Durfee	17
3 La formule pentagonale d'Euler	19
3.1 Nombres pentagonaux et énoncé du théorème	19
3.2 Preuve analytique	20
3.3 Preuve combinatoire : l'involution de Franklin	22
3.4 Formule de récurrence pour $p(n)$	24
4 Comportement asymptotique de $p(n)$	27
4.1 Encadrements élémentaires de $p(n)$	27
4.2 Outils préliminaires	28
4.3 Encadrements exponentiels de $p(n)$	31
4.4 Le théorème asymptotique de Hardy-Ramanujan	34
Conclusion	36

Introduction

La théorie des nombres se divise classiquement en deux branches. La *théorie multiplicative* étudie les propriétés liées à la factorisation des entiers en nombres premiers : répartition des nombres premiers, fonctions arithmétiques multiplicatives, caractères de Dirichlet, etc. La *théorie additive*, quant à elle, s'intéresse aux représentations d'un entier comme somme d'entiers appartenant à un ensemble donné $A = \{a_1, a_2, \dots\}$, où les a_i sont des nombres particuliers tels que des nombres premiers, des carrés, des cubes, des nombres triangulaires, etc. Chaque représentation de n comme somme d'éléments de A est appelée une *partition* de n , et l'on s'intéresse à la fonction qui compte ces partitions.

Parmi les problèmes célèbres de la théorie additive, citons la conjecture de Goldbach (1742, toujours ouverte), le problème de Waring et les formules de Jacobi pour les représentations en sommes de carrés.

Le cas le plus fondamental de la théorie additive est celui des *partitions non restreintes*, où l'ensemble A est constitué de tous les entiers positifs et où l'ordre des termes n'est pas pris en compte. Une partition d'un entier n est alors une suite décroissante d'entiers positifs dont la somme vaut n . Par exemple, les 7 partitions de 5 sont :

$$5, \quad 4 + 1, \quad 3 + 2, \quad 3 + 1 + 1, \quad 2 + 2 + 1, \quad 2 + 1 + 1 + 1, \quad 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

On note $p(n)$ le nombre de partitions de n . La fonction $p(n)$ croît très rapidement et il n'existe pas de formule close. Comprendre cette croissance et trouver des méthodes de calcul efficaces constituent deux des questions centrales de la théorie.

L'étude systématique des partitions remonte à Euler, qui développa au XVIII^e siècle les outils fondamentaux de la théorie. Il établit la formule du produit infini $\sum p(n)x^n = \prod (1 - x^n)^{-1}$, qui encode la suite $p(n)$ tout entière dans un seul objet analytique, puis obtint la formule pentagonale, qui fournit une récurrence pour $p(n)$ ne faisant intervenir que $O(\sqrt{n})$ termes. MacMahon utilisa cette récurrence pour calculer $p(n)$ jusqu'à $n = 200$. En 1918, Hardy et Ramanujan établirent, par la méthode du cercle, la formule asymptotique

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right).$$

Rademacher (1937) alla plus loin en obtenant une série convergente exacte pour $p(n)$.

Ces résultats, qui s'étendent sur plus de deux siècles, montrent comment une question combinatoire en apparence simple conduit à des méthodes de plus en plus élaborées. C'est ce cheminement que ce TER se propose de retracer : des arguments géométriques sur les diagrammes de Ferrers aux séries génératrices et à la formule pentagonale, jusqu'à l'asymptotique de Hardy et Ramanujan.

Les développements qui suivent s'appuient principalement sur les ouvrages d'Apostol [1] (chapitre 14) et de Hua Loo Keng [2] (chapitre 8), complétés ponctuellement par Andrews [4] pour les aspects combinatoires.

Chapitre 1

Partitions et diagrammes de Ferrers

L'outil de base de l'approche combinatoire est le *diagramme de Ferrers*, représentation graphique d'une partition qui transforme les questions arithmétiques en questions géométriques. Ce chapitre présente les définitions fondamentales, les propriétés de conjugaison, et le théorème d'Euler sur les parts distinctes et les parts impaires, ainsi que sa généralisation due à Glaisher.

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1.1. Soit n un entier positif. Une **partition** de n est une suite finie d'entiers positifs (a_1, a_2, \dots, a_m) telle que

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_m \geq 1 \quad \text{et} \quad a_1 + a_2 + \dots + a_m = n.$$

Les entiers a_i sont appelés les *parts* de la partition, m est la longueur de la partition, et n est le *poids*. On note $p(n)$ le nombre de partitions de n , et par convention $p(0) = 1$ (la partition vide).

L'écriture en ordre décroissant n'est qu'une convention destinée à éviter les doublons : les décompositions $3 + 1 + 1$ et $1 + 3 + 1$ représentent la même partition $(3, 1, 1)$ de 5. On notera parfois une partition à l'aide d'exposants pour indiquer la multiplicité des parts : si exactement f_i des parts sont égales à i , on écrit $\lambda = (1^{f_1} 2^{f_2} 3^{f_3} \dots)$, de sorte que $\sum_{i \geq 1} i f_i = n$. Par exemple, la partition $(3, 1, 1)$ de 5 s'écrit aussi $1^2 3^1$.

Exemple 1.1. Les partitions de $n = 1, 2, 3, 4, 5$ sont :

n	Partitions	$p(n)$
1	(1)	1
2	(2), (1, 1)	2
3	(3), (2, 1), (1, 1, 1)	3
4	(4), (3, 1), (2, 2), (2, 1, 1), (1, 1, 1, 1)	5
5	(5), (4, 1), (3, 2), (3, 1, 1), (2, 2, 1), (2, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1)	7

La croissance de $p(n)$ s'accélère considérablement :

$$p(10) = 42, \quad p(20) = 627, \quad p(50) = 204\,226, \quad p(100) = 190\,569\,292.$$

Ces valeurs illustrent qu'une énumération exhaustive des partitions est hors de portée dès que

n devient modérément grand ; c'est ce qui motive la recherche de formules et de méthodes calculatoires efficaces.

On s'intéresse souvent non à toutes les partitions de n , mais à certaines sous-classes. On désignera par $p(S, n)$ le nombre de partitions de n appartenant à un ensemble S de partitions. Les deux exemples les plus importants dans ce chapitre sont :

- $\mathcal{I}(n)$: partitions de n en **parts impaires** (chaque part est un entier impair) ;
- $\mathcal{D}(n)$: partitions de n en **parts distinctes** (chaque entier apparaît au plus une fois).

Exemple 1.2. Le tableau suivant liste les partitions en parts impaires et en parts distinctes pour $n = 1, \dots, 7$:

n	$\mathcal{I}(n)$	$\mathcal{D}(n)$
1	(1)	(1)
2	(1, 1)	(2)
3	(3), (1, 1, 1)	(3), (2, 1)
4	(3, 1), (1 ⁴)	(4), (3, 1)
5	(5), (3, 1, 1), (1 ⁵)	(5), (4, 1), (3, 2)
6	(5, 1), (3, 3), (3, 1, 1, 1), (1 ⁶)	(6), (5, 1), (4, 2), (3, 2, 1)
7	(7), (5, 1, 1), (3, 3, 1), (3, 1 ⁴), (1 ⁷)	(7), (6, 1), (5, 2), (4, 3), (4, 2, 1)

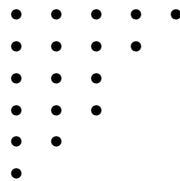
Le fait que les deux colonnes aient le même nombre de partitions pour tout $n \leq 7$ et bien que les partitions listées soient différentes c'est en réalité un théorème général dû à Euler (Théorème 1.1).

1.2 Diagrammes de Ferrers

On représente une partition graphiquement par un tableau de points appelé *diagramme de Ferrers*¹, introduit au XIX^e siècle.

Définition 1.2. Soit $\lambda = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ une partition de n . Le **diagramme de Ferrers** de λ est un tableau de n points disposés en m lignes, la i -ème ligne contenant a_i points, les lignes étant alignées à gauche.

Exemple 1.3. Le diagramme de Ferrers de la partition $(5, 4, 3, 3, 2, 1)$ de 18 est :



La première ligne contient 5 points ($a_1 = 5$), la deuxième 4, etc.

1. Nommé en l'honneur du mathématicien britannique Norman Macleod Ferrers (1829–1903), qui introduisit cette représentation graphique dans ses travaux sur les partitions. On trouve également dans la littérature le nom de *diagramme de Young*, surtout lorsque les cases sont représentées par des carrés ; cette variante est particulièrement utile en théorie des représentations.

1.3 Partition conjuguée

Si l'on lit les *colonnes* du diagramme de Ferrers au lieu des lignes, on obtient une nouvelle partition, dite **conjuguée**. La conjugaison échange le nombre de parts et la taille de la plus grande part.

Définition 1.3. Soit λ une partition. La **partition conjuguée** λ' est la partition obtenue en lisant les colonnes du diagramme de Ferrers de λ comme des lignes. Formellement, la j -ème part de λ' est le nombre de parts de λ qui sont $\geq j$.

Exemple 1.4. Considérons $\lambda = (5, 4, 3, 3, 2, 1)$, partition de 18. En lisant les colonnes du diagramme :

- Colonne 1 : 6 points $\Rightarrow a'_1 = 6$
- Colonne 2 : 5 points $\Rightarrow a'_2 = 5$
- Colonne 3 : 4 points $\Rightarrow a'_3 = 4$
- Colonne 4 : 2 points $\Rightarrow a'_4 = 2$
- Colonne 5 : 1 point $\Rightarrow a'_5 = 1$

Donc $\lambda' = (6, 5, 4, 2, 1)$, partition de 18. On vérifie bien $6 + 5 + 4 + 2 + 1 = 18 = |\lambda|$.

Proposition 1.1. La conjugaison est une **involution** : $(\lambda')' = \lambda$. De plus, $|\lambda'| = |\lambda|$.

Démonstration. Soit $\lambda = (a_1, \dots, a_m)$ une partition de n . Par définition, la j -ème part de la conjuguée est

$$a'_j = |\{i : 1 \leq i \leq m, a_i \geq j\}|.$$

Autrement dit, a'_j est le nombre de lignes du diagramme ayant au moins j points, c'est-à-dire le nombre de points de la j -ème colonne.

Preuve de $(\lambda')' = \lambda$. La i -ème part de $(\lambda')'$ est $|\{j : a'_j \geq i\}|$. Or $a'_j \geq i$ signifie que la j -ème colonne de λ a au moins i points, c'est-à-dire que la i -ème ligne a au moins j points : $a_i \geq j$. Donc $|\{j : a'_j \geq i\}| = a_i$, ce qui donne $(\lambda')' = \lambda$.

Conservation du poids.

$$|\lambda'| = \sum_j a'_j = \sum_j |\{i : a_i \geq j\}| = \sum_i a_i = |\lambda|,$$

car chaque point (i, j) du diagramme est compté exactement une fois dans chacune des deux sommes. \square

La conjugaison est donc une bijection de l'ensemble des partitions de n vers lui-même. Ce simple fait a une conséquence immédiate.

Proposition 1.2. Le nombre de partitions de n en au plus k parts est égal au nombre de partitions de n dont la plus grande part est au plus k .

Démonstration. Si λ est une partition de n en au plus k parts, son diagramme a au plus k lignes. Sa conjuguée λ' a donc des colonnes de longueur au plus k , autrement dit sa plus grande part est $\leq k$. Réciproquement, si la plus grande part de λ est $\leq k$, son diagramme a au plus k colonnes, donc sa conjuguée a au plus k lignes, i.e. au plus k parts. Comme la conjugaison est une bijection involutive (Proposition 1.1), c'est bien une correspondance biunivoque entre les deux ensembles. \square

Exemple 1.5. Les partitions de 6 en au plus 3 parts et les partitions de 6 en parts ≤ 3 sont exactement en bijection par conjugaison :

Au plus 3 parts		Parts ≤ 3
(6)	\longleftrightarrow	(1, 1, 1, 1, 1, 1)
(5, 1)	\longleftrightarrow	(2, 1, 1, 1, 1)
(4, 2)	\longleftrightarrow	(2, 2, 1, 1)
(4, 1, 1)	\longleftrightarrow	(3, 1, 1, 1)
(3, 3)	\longleftrightarrow	(2, 2, 2)
(3, 2, 1)	\longleftrightarrow	(3, 2, 1)
(2, 2, 2)	\longleftrightarrow	(3, 3)

On compte bien 7 partitions dans chaque colonne. La partition (3, 2, 1) est auto-conjuguée : $\lambda = \lambda'$.

1.4 Le théorème d'Euler

Théorème 1.1 (Euler) *Le nombre de partitions de n en **parts distinctes** est égal au nombre de partitions de n en **parts impaires**.*

Ce résultat est illustré dans l'Exemple 1.2. Il admet deux preuves de nature différente. La première, due à Glaisher (1883), est bijective et entièrement combinatoire. La seconde, par les séries génératrices, sera donnée au Chapitre 2 ; elle s'inscrit dans un cadre plus général et met en évidence le rôle du produit infini.

Démonstration. (Bijection de Glaisher, 1883.) On construit explicitement une bijection entre $\mathcal{D}(n)$ et $\mathcal{I}(n)$.

De $\mathcal{D}(n)$ vers $\mathcal{I}(n)$: Soit $\lambda \in \mathcal{D}(n)$. Pour chaque part a de λ , on écrit de façon unique $a = 2^\alpha \cdot d$ avec d impair et $\alpha \geq 0$. On remplace la part a par 2^α copies de la part impaire d . On effectue cette opération pour chaque part de λ , puis on trie les parts obtenues en ordre décroissant pour former μ .

Vérification que $\mu \in \mathcal{I}(n)$: Chaque part de μ est la partie impaire d issue de $a = 2^\alpha d$, donc impaire. La somme totale est conservée car $2^\alpha \cdot d = a$, donc $\sum_{\text{parts de } \mu} = \sum_{\text{parts de } \lambda} = n$.

De $\mathcal{I}(n)$ vers $\mathcal{D}(n)$: Soit $\mu \in \mathcal{I}(n)$. Pour chaque valeur impaire d apparaissant dans μ , on note f la multiplicité de d dans μ , et on écrit la décomposition binaire $f = \sum_j 2^{\alpha_j}$ (puissances de 2 distinctes). On remplace les f copies de d par les parts $2^{\alpha_j} \cdot d$ pour chaque j .

Vérification que l'image est dans $\mathcal{D}(n)$: Pour un d fixé, les parts $2^{\alpha_j} d$ sont distinctes car les α_j sont distincts. Pour deux valeurs impaires $d \neq d'$, les parts $2^\alpha d$ et $2^\beta d'$ sont distinctes : en effet, leur égalité forcerait $d = d'$ (en comparant les parties impaires de chaque côté), contradiction. La somme totale est conservée car $\sum_j 2^{\alpha_j} \cdot d = f \cdot d$.

Les deux constructions sont réciproques : la première décompose chaque part $a = 2^\alpha d$ en 2^α copies de d , tandis que la seconde regroupe ces copies pour reconstruire a . Ainsi, les deux applications sont inverses l'une de l'autre. \square

Exemple 1.6. Prenons $\lambda = (6, 5, 3, 1) \in \mathcal{D}(15)$:

- $6 = 2^1 \cdot 3 \rightarrow 2$ copies de 3 ;
- $5 = 2^0 \cdot 5 \rightarrow 1$ copie de 5 ;
- $3 = 2^0 \cdot 3 \rightarrow 1$ copie de 3 ;
- $1 = 2^0 \cdot 1 \rightarrow 1$ copie de 1.

On obtient $\mu = (5, 3, 3, 3, 1) \in \mathcal{I}(15)$.

Réciproquement, à partir de $\mu = (5, 3, 3, 3, 1)$: la part 3 apparaît $f = 3 = 2^1 + 2^0$ fois, donnant $2 \cdot 3 = 6$ et $1 \cdot 3 = 3$; la part 5 apparaît $f = 1 = 2^0$ fois, donnant 5 ; la part 1 apparaît $f = 1 = 2^0$ fois, donnant 1. On retrouve $\lambda = (6, 5, 3, 1)$.

1.5 Généralisation : le théorème de Glaisher

Le théorème d'Euler est en réalité le cas particulier $d = 2$ d'un résultat plus général dû à Glaisher²

Théorème 1.2 (Glaisher, 1883.) *Soit $d \geq 2$ un entier. Le nombre de partitions de n dont aucune part n'est divisible par d est égal au nombre de partitions de n dans lesquelles aucune part n'apparaît d fois ou plus.*

Remarque 1.1. Pour $d = 2$, les partitions dont aucune part n'est divisible par 2 sont les partitions en parts impaires, et les partitions où aucune part n'apparaît 2 fois ou plus sont exactement les partitions en parts distinctes. On retrouve ainsi le Théorème 1.1 d'Euler.

Démonstration. On note $\mathcal{A}_d(n)$ l'ensemble des partitions de n dont aucune part n'est divisible par d , et $\mathcal{B}_d(n)$ l'ensemble des partitions de n dont aucune part n'apparaît d fois ou plus (i.e. chaque part a une multiplicité $\leq d - 1$). On construit une bijection $\varphi : \mathcal{B}_d(n) \rightarrow \mathcal{A}_d(n)$.

De $\mathcal{B}_d(n)$ vers $\mathcal{A}_d(n)$: Soit $\lambda \in \mathcal{B}_d(n)$. Pour chaque part λ_i de λ , on écrit de façon unique

$$\lambda_i = d^{\alpha_i} \cdot e_i, \quad d \nmid e_i, \quad \alpha_i \geq 0.$$

On définit $\varphi(\lambda)$ en remplaçant chaque part λ_i par d^{α_i} copies de la part e_i , pour tout i .

L'image est dans $\mathcal{A}_d(n)$: Chaque part e_i vérifie $d \nmid e_i$ par construction, donc aucune part de $\varphi(\lambda)$ n'est divisible par d . La somme est conservée car $d^{\alpha_i} \cdot e_i = \lambda_i$.

De $\mathcal{A}_d(n)$ vers $\mathcal{B}_d(n)$: Soit $\mu \in \mathcal{A}_d(n)$. Pour chaque valeur e apparaissant dans μ (avec $d \nmid e$), on note f sa multiplicité totale dans μ . On écrit f en base d :

$$f = \sum_{j \geq 0} c_j d^j, \quad c_j \in \{0, 1, \dots, d - 1\},$$

décomposition finie et unique. On regroupe les f copies de e en parts $d^j \cdot e$, chacune de multiplicité c_j .

L'image est dans $\mathcal{B}_d(n)$: Pour chaque part $d^j e$, sa multiplicité est $c_j \leq d - 1 < d$, donc aucune part n'apparaît d fois ou plus. Pour deux valeurs $e \neq e'$ (toutes deux non divisibles par d), les parts $d^j e$ et $d^{j'} e'$ sont distinctes car leurs parties non divisibles par d diffèrent. La somme est conservée car $\sum_j c_j d^j \cdot e = f \cdot e$.

Bijektivité : La décomposition $\lambda_i = d^{\alpha_i} e_i$ avec $d \nmid e_i$ est unique (unicité de la valuation d -adique), et la décomposition en base d de f est unique. Les applications φ et φ^{-1} sont donc bien inverses l'une de l'autre, ce qui établit la bijection $|\mathcal{B}_d(n)| = |\mathcal{A}_d(n)|$. \square

2. James Whitbread Lee Glaisher (1848-1928) était un mathématicien anglais connu pour ses travaux en théorie des nombres. Il est particulièrement reconnu pour ses contributions à l'étude des représentations entières, y compris la représentation des entiers sous forme de sommes de carrés.

Exemple 1.7. Pour $d = 3$ et $n = 6$ (aucune part divisible par 3 \leftrightarrow chaque part apparaît au plus 2 fois) :

$\mathcal{A}_3(6)$: aucune part $\equiv 0 \pmod{3}$	\longleftrightarrow	$\mathcal{B}_3(6)$: chaque part ≤ 2 fois
(5, 1)	\longleftrightarrow	(5, 1)
(4, 2)	\longleftrightarrow	(4, 2)
(4, 1, 1)	\longleftrightarrow	(4, 1, 1)
(2, 2, 2)	\longleftrightarrow	(6)
(2, 2, 1, 1)	\longleftrightarrow	(2, 2, 1, 1)
(2, 1, 1, 1, 1)	\longleftrightarrow	(2, 4)
(1 ⁶)	\longleftrightarrow	(3, 3)

On compte 7 partitions dans chaque ensemble. Par exemple, $(2, 2, 2) \in \mathcal{A}_3(6)$ contient la valeur $e = 2$ avec multiplicité $f = 3 = 1 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0$ (écriture en base 3 : $3 = 10_3$), ce qui donne 1 copie de $3^1 \cdot 2 = 6$ et 0 copie de $3^0 \cdot 2 = 2$, soit la partition $(6) \in \mathcal{B}_3(6)$.

Chapitre 2

Séries génératrices et formule d'Euler

Au lieu de manipuler les partitions individuellement, on les encode dans une **série génératrice** et l'on cherche une expression en produit infini. Cette approche, inaugurée par Euler, permet de traiter simultanément toutes les partitions d'un entier et d'obtenir des identités remarquables. Ce chapitre pose les fondations analytiques nécessaires : séries formelles, produits infinis avant d'établir la formule d'Euler et ses principales applications.

2.1 Séries formelles et séries génératrices

Séries formelles

Définition 2.1. Une **série formelle** est une suite de nombres complexes (a_0, a_1, a_2, \dots) , représentée par le symbole

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots,$$

où x est une variable formelle. On dit que $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est la **série génératrice** de la suite $(a_n)_{n \geq 0}$. On note $\mathbb{C}[[x]]$ l'ensemble des séries formelles à coefficients complexes.

Le symbole de sommation est ici purement *formel* : on ne calcule pas de somme infinie, et x n'est pas une variable numérique. Le terme x^n sert uniquement à repérer la place du n -ième coefficient. En particulier, on ne se pose *jamais* de question de convergence au niveau formel. On procède néanmoins à l'abus de notation consistant à noter $A(x) = \sum a_n x^n$, car cette écriture appelle la bonne intuition des développements en série.

Produit de séries formelles

Le **produit** de deux séries formelles $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $B(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$ est défini par la **formule de Cauchy** :

$$A(x) \cdot B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{où} \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

C'est la formule naturelle qui apparaît en développant naïvement le produit ; le calcul de c_n ne fait intervenir qu'un nombre fini de coefficients.

Du registre formel au registre analytique

Dans la pratique, les séries génératrices que nous manipulerons seront analytiques pour $|x|$ suffisamment petit. Nous soulignons que les deux approches, formelle et analytique, ont chacune leurs mérites : l'approche formelle justifie presque trivialement les réarrangements de séries et de produits, tandis que l'approche analytique est indispensable pour les questions asymptotiques.

Nous travaillerons dans le cadre suivant : toutes les séries génératrices qui apparaissent dans ce chapitre convergent absolument pour $|x| < 1$. Cela justifie tous les réarrangements de termes. En particulier, on utilisera librement le passage du registre formel au registre analytique, en signalant la transition lorsqu'elle est importante.

L'observation fondamentale est que, pour $|x| < 1$ et tout entier $m \geq 1$,

$$\frac{1}{1-x^m} = \sum_{k \geq 0} x^{km} = 1 + x^m + x^{2m} + \dots$$

Chaque terme x^{km} correspond au choix de k parts égales à m dans une partition.

2.2 Produits infinis

Avant d'énoncer la formule d'Euler, nous rappelons la notion de produit infini, moins classique que les séries mais tout aussi fondamentale.

Définition 2.2. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres complexes non nuls. Le **produit infini** $\prod_{n \geq 1} u_n$ est la suite des produits partiels $(P_N)_{N \geq 1}$, où $P_N = \prod_{n=1}^N u_n$. On dit que ce produit **converge** si la suite (P_N) converge vers une limite non nulle, et cette limite est alors notée $\prod_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Le critère suivant ramène l'étude d'un produit infini à celle d'une série, outil bien plus familier.

Théorème 2.1. Soit $(u_n)_n$ une suite de réels telle que $u_n \neq -1$ pour tout n et $u_n \rightarrow 0$. Il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\prod_{n \geq n_0} (1 + u_n)$$

converge si et seulement si

$$\sum_{n \geq n_0} \log(1 + u_n)$$

converge.

Démonstration. Puisque $u_n \rightarrow 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $1 + u_n > 0$. Pour tout $N \geq n_0$ on a,

$$\prod_{n=n_0}^N (1 + u_n) = \exp\left(\sum_{n=n_0}^N \log(1 + u_n)\right).$$

Si $\sum_{n \geq n_0} \log(1 + u_n)$ converge, ses sommes partielles convergent vers une limite finie ℓ . Par continuité de l'exponentielle, $P_N \rightarrow e^\ell \neq 0$, donc, $\prod_{n \geq n_0} (1 + u_n)$ converge. Réciproquement, si

$\prod_n (1 + u_n)$ converge vers une limite non nulle L , alors pour $N \geq n_0$,

$$\sum_{n=n_0}^N \log(1 + u_n) = \log \left(\prod_{n=n_0}^N (1 + u_n) \right) \rightarrow \log L \in \mathbb{R},$$

donc, $\sum_{n \geq n_0} \log(1 + u_n)$ converge. \square

Corollaire 2.1. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels avec $u_n \rightarrow 0$, $u_n \neq -1$ pour tout n , et de signe constant à partir d'un certain rang. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\prod_{n \geq n_0} (1 + u_n) \text{ converge si et seulement si } \sum_{n \geq n_0} u_n \text{ converge.}$$

Démonstration. Comme $u_n \rightarrow 0$, on a l'équivalence $\log(1 + u_n) \sim u_n$. Puisque (u_n) est de signe constant à partir d'un certain rang, les séries $\sum_n \log(1 + u_n)$ et $\sum_n u_n$ sont de même nature. On conclut grâce au Théorème 2.1. \square

2.3 La série génératrice de $p(n)$ et la formule d'Euler

Définition 2.3. La série génératrice des partitions est

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n,$$

avec la convention $p(0) = 1$.

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le résultat central de ce chapitre.

Théorème 2.2 (Formule d'Euler.) Pour $|x| < 1$, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^m}.$$

Démonstration. La preuve procède en trois étapes : on identifie d'abord formellement les coefficients du produit infini avec $p(n)$, puis on justifie la convergence et en fin, le passage à la limite.

1) En développant chaque facteur en série géométrique, on obtient formellement :

$$\prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^m} = \prod_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{k_m \geq 0} x^{m k_m} \right) = \sum_{k_1, k_2, \dots \geq 0} x^{k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \dots}.$$

Un terme général x^n apparaît chaque fois que $k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \dots = n$, c'est-à-dire chaque fois que l'on choisit k_m parts égales à m pour tout $m \geq 1$. Cela correspond exactement à une partition de n (avec k_m parts égales à m). Chaque partition de n contribue exactement une fois, donc le coefficient de x^n est $p(n)$.

2) On restreint x à l'intervalle réel $0 \leq x < 1$. Posons, pour tout $m \geq 1$:

$$F_m(x) = \prod_{k=1}^m \frac{1}{1 - x^k}, \quad F(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^k}.$$

En écrivant $\frac{1}{1-x^k} = 1 + u_k$ avec $u_k = \frac{x^k}{1-x^k} \geq 0$, le Corollaire 2.1 ramène la convergence de $F(x)$ à celle de $\sum_{k \geq 1} u_k$. Or

$$0 \leq u_k = \frac{x^k}{1-x^k} \leq \frac{x^k}{1-x},$$

et la série $\sum_{k \geq 1} x^k = \frac{x}{1-x}$ converge pour $0 \leq x < 1$. Donc $F(x)$ converge. De plus, la suite $(F_m(x))$ est croissante car $F_{m+1}(x) = (1-x^{m+1})^{-1}F_m(x) \geq F_m(x)$, et $F_m(x) \leq F(x)$ pour tout m .

3) $F_m(x)$ est un produit fini de séries absolument convergentes, donc elle-même une série absolument convergente :

$$F_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_m(n) x^n,$$

où $p_m(n)$ désigne le nombre de partitions de n en parts $\leq m$. Pour $m \geq n$, on a $p_m(n) = p(n)$; en général, $0 \leq p_m(n) \leq p(n)$ et $p_m(n) \rightarrow p(n)$ quand $m \rightarrow \infty$.

Pour tout $K \geq 0$, puisque $x \geq 0$:

$$\sum_{n=0}^K p(n) x^n = \sum_{n=0}^K p_K(n) x^n \leq F_K(x) \leq F(x),$$

ce qui montre que la série $\sum p(n) x^n$ converge (ses sommes partielles sont croissantes et majorées par $F(x)$). De plus, $p_m(n) \leq p(n)$ implique $F_m(x) \leq \sum p(n) x^n \leq F(x)$. Par convergence dominée (en domination par $p(n)x^n$ qui est sommable) :

$$F(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} F_m(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} p_m(n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n.$$

Conclusion : L'identité est établie pour $0 \leq x < 1$. Les deux membres étant des fonctions analytiques de x sur le disque $|x| < 1$ qui coïncident sur l'intervalle réel $[0, 1)$, elles coïncident sur tout le disque $|x| < 1$ par le principe du prolongement analytique. \square

2.4 Applications : partitions restreintes

Le produit infini de la formule d'Euler se modifie aisément pour compter des classes restreintes de partitions. Il suffit de sélectionner les facteurs correspondant aux parts autorisées ou d'ajuster leur développement. Les trois cas fondamentaux sont rassemblés dans la table suivante.

Série génératrice	Partitions de n en...
$\prod_{m=1}^{\infty} (1 + x^m)$	parts <i>distinctes</i>
$\prod_{m=1}^N \frac{1}{1-x^m}$	parts $\leq N$
$\frac{x^k}{(1-x)(1-x^2) \cdots (1-x^k)}$	exactement k parts

Table 2.1 Séries génératrices de partitions restreintes

Justifions chacune de ces trois séries génératrices.

1) **Parts distinctes.** Pour une partition en parts distinctes, chaque entier $m \geq 1$ apparaît *au plus une fois*. Le facteur associé à la part m est donc $(1 + x^m)$, où le terme 1 correspond à l'absence de m et le terme x^m à sa présence (au lieu de $\frac{1}{1-x^m}$ qui autoriserait des répétitions). Ces choix étant indépendants pour chaque m , la série génératrice est

$$\sum_{n=0}^{\infty} q(n) x^n = \prod_{m=1}^{\infty} (1 + x^m),$$

où $q(n)$ désigne le nombre de partitions de n en parts distinctes.

2) **Parts bornées par N .** Si les parts sont contraintes à être $\leq N$, seuls les facteurs $m = 1, \dots, N$ interviennent dans le produit d'Euler. On obtient le produit fini :

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{\leq N}(n) x^n = \prod_{m=1}^N \frac{1}{1 - x^m},$$

où $p_{\leq N}(n)$ désigne le nombre de partitions de n en parts $\leq N$.

3) **Exactement k parts.** Notons $p_k(n)$ le nombre de partitions de n en exactement k parts, et $p_{\leq k}(j)$ le nombre de partitions de j en parts $\leq k$. On construit une bijection entre les partitions de n en exactement k parts et les partitions de $n - k$ en parts $\leq k$, ce qui établira l'égalité :

$$p_k(n) = p_{\leq k}(n - k).$$

En effet, soit $\lambda = (a_1, \dots, a_k)$ une partition de n en exactement k parts, avec $a_1 \geq \dots \geq a_k \geq 1$. On lui associe

$$\mu = (a_1 - 1, a_2 - 1, \dots, a_k - 1).$$

Puisque $a_i \geq 1$ pour tout i , les parts de μ sont ≥ 0 , et μ est une partition de $n - k$ en au plus k parts positives. Par la Proposition 1.2 (conjugaison), ceci est en bijection avec les partitions de $n - k$ en parts $\leq k$. L'application $\lambda \mapsto \mu$ est une bijection (son inverse est $\mu \mapsto (a_1 + 1, \dots, a_k + 1)$), d'où $p_k(n) = p_{\leq k}(n - k)$.

La série génératrice de $p_{\leq k}(j)$ est $\prod_{m=1}^k (1 - x^m)^{-1}$ (cas 2 ci-dessus). Puisque $p_k(n) = p_{\leq k}(n - k)$, multiplier par x^k décale les indices de k unités, d'où :

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_k(n) x^n = \frac{x^k}{(1 - x)(1 - x^2) \cdots (1 - x^k)}.$$

Exemple 2.1. Illustrons les trois cas pour de petites valeurs.

Cas 1 parts distinctes, $n = 5$. Les partitions de 5 en parts distinctes sont :

$$(5), \quad (4, 1), \quad (3, 2).$$

Donc $q(5) = 3$. Dans le produit $\prod_{m=1}^5 (1 + x^m)$, les termes contribuant à x^5 sont bien x^5 , $x^4 \cdot x^1$ et $x^3 \cdot x^2$.

Cas 2 parts ≤ 3 , $n = 4$. Les partitions de 4 en parts ≤ 3 sont :

$$(3, 1), \quad (2, 2), \quad (2, 1, 1), \quad (1, 1, 1, 1).$$

Donc $p_{\leq 3}(4) = 4$.

Cas 3 exactement 3 parts, $n = 6$. Les partitions de 6 en exactement 3 parts sont :

$$(4, 1, 1), \quad (3, 2, 1), \quad (2, 2, 2).$$

Donc $p_3(6) = 3$. Par la bijection, cela correspond aux partitions de $6 - 3 = 3$ en parts ≤ 3 :

$$(3), \quad (2, 1), \quad (1, 1, 1),$$

soit bien $p_{\leq 3}(3) = 3$.

Le cas 1 fournit une preuve analytique du théorème d'Euler, qui complète la preuve bijective du Chapitre 1.

Corollaire 2.2. *Pour $|x| < 1$, on a l'identité :*

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1 + x^m) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1 - x^{2k+1}}.$$

En conséquence, pour tout entier $n \geq 0$, le nombre de partitions de n en parts distinctes est égal au nombre de partitions de n en parts impaires.

Démonstration. On part de l'identité algébrique

$$1 + x^m = \frac{1 - x^{2m}}{1 - x^m},$$

valable pour $x \neq 1$. En prenant le produit sur tous les entiers $m \geq 1$:

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1 + x^m) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1 - x^{2m}}{1 - x^m}.$$

Le numérateur $\prod_{m=1}^{\infty} (1 - x^{2m})$ contient exactement les facteurs $(1 - x^n)$ pour n pair, i.e. $n \in \{2, 4, 6, \dots\}$. Le dénominateur $\prod_{m=1}^{\infty} (1 - x^m)$ contient tous les facteurs $(1 - x^n)$ pour $n \geq 1$. En simplifiant les facteurs pairs communs aux deux, il reste au dénominateur uniquement les facteurs d'indice impair :

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1 + x^m) = \frac{\prod_{m=1}^{\infty} (1 - x^{2m})}{\prod_{m=1}^{\infty} (1 - x^m)} = \frac{1}{\prod_{k=0}^{\infty} (1 - x^{2k+1})}.$$

Puisque $\prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1 - x^{2k+1}}$ est la série génératrice des partitions en parts impaires (formule d'Euler restreinte aux facteurs impaires), et que $\prod_{m=1}^{\infty} (1 + x^m)$ est la série génératrice des partitions en parts distinctes (cas 1 ci-dessus), l'égalité des deux séries génératrices implique l'égalité des coefficients : le nombre de partitions de n en parts distinctes est égal au nombre de partitions de n en parts impaires. \square

Exemple 2.2. Pour $n = 7$, les partitions en parts distinctes sont :

$$(7), \quad (6, 1), \quad (5, 2), \quad (4, 3), \quad (4, 2, 1),$$

et les partitions en parts impaires sont :

$$(7), \quad (5, 1, 1), \quad (3, 3, 1), \quad (3, 1, 1, 1, 1), \quad (1^7).$$

Dans les deux cas on trouve 5 partitions, ce qui confirme le corollaire.

Remarque 2.1. Cette preuve analytique est plus courte que la bijection de Glaisher (Chapitre 1), mais elle dit moins : elle affirme l'égalité des comptages sans exhiber de correspondance explicite entre les deux types de partitions. Les deux approches sont complémentaires.

2.5 Preuve analytique du théorème de Glaisher

La méthode des séries génératrices fournit également une preuve rapide et transparente du théorème de Glaisher (Théorème 1.2), dont la preuve bijective au Chapitre 1 était plus technique.

Théorème 2.3 (Glaisher, preuve analytique.) Soit $d \geq 2$ un entier. Pour $|x| < 1$,

$$\prod_{\substack{m \geq 1 \\ d \nmid m}} \frac{1}{1 - x^m} = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1 + x^m + x^{2m} + \dots + x^{(d-1)m}}.$$

En conséquence, le nombre de partitions de n dont aucune part n'est divisible par d est égal au nombre de partitions de n dans lesquelles aucune part n'apparaît d fois ou plus.

Démonstration. On part de l'identité géométrique, valable pour $x^m \neq 1$:

$$1 + x^m + x^{2m} + \dots + x^{(d-1)m} = \frac{1 - x^{dm}}{1 - x^m}.$$

En prenant le produit sur tous les entiers $m \geq 1$:

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1 + x^m + \dots + x^{(d-1)m}) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1 - x^{dm}}{1 - x^m}.$$

Le numérateur $\prod_{m \geq 1} (1 - x^{dm})$ regroupe exactement les facteurs $(1 - x^n)$ pour $d \mid n$. Le dénominateur $\prod_{m \geq 1} (1 - x^m)$ regroupe tous les facteurs. En simplifiant les facteurs $(1 - x^n)$ avec $d \mid n$, il reste au dénominateur uniquement les facteurs d'indice non divisible par d :

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1 + x^m + \dots + x^{(d-1)m}) = \prod_{\substack{m \geq 1 \\ d \nmid m}} \frac{1}{1 - x^m}.$$

Interprétation des deux membres :

- Le membre gauche est la série génératrice des partitions où chaque part m apparaît au plus $d - 1$ fois : le facteur $(1 + x^m + x^{2m} + \dots + x^{(d-1)m})$ encode le choix de $0, 1, \dots$ ou $d - 1$ copies de la part m .
- Le membre droit est la série génératrice des partitions dont aucune part n'est divisible par d : on ne retient que les facteurs m vérifiant $d \nmid m$.

L'égalité des séries génératrices implique l'égalité coefficient par coefficient, ce qui établit le théorème.

Pour $d = 2$, l'identité devient

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1 + x^m) = \prod_{\substack{m \geq 1 \\ 2 \nmid m}} \frac{1}{1 - x^m} = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1 - x^{2k+1}},$$

ce qui redonne exactement le Corollaire 2.2. □

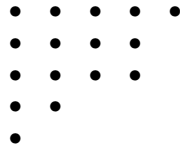
2.6 Une identité remarquable : le carré de Durfee

Nous concluons ce chapitre par une identité analytique due à Euler, qui peut aussi être lue comme une décomposition combinatoire des partitions. Cette identité repose sur la notion

de carré de Durfee, introduite par W. P. Durfee dans le cadre de la théorie combinatoire des partitions.

Définition 2.4. Soit λ une partition. Le **carré de Durfee** de λ est le plus grand carré $s \times s$ de points contenu dans le coin supérieur gauche du diagramme de Ferrers de λ . On note $d(\lambda) = s$ le côté du carré de Durfee.

Exemple 2.3. Pour $\lambda = (5, 4, 4, 2, 1)$, partition de 16, le diagramme est :



Le plus grand carré dans le coin supérieur gauche a côté 3 (les $3 \times 3 = 9$ premiers points forment un carré), donc $d(\lambda) = 3$.

Le carré de Durfee décompose le diagramme de Ferrers en trois parties distinctes : le carré lui-même, la région à droite du carré (les colonnes supplémentaires des s premières lignes), et la région sous le carré (les lignes $s + 1, s + 2, \dots$). La partie droite et la partie inférieure sont des partitions en au plus s parts, ce qui conduit à l'identité suivante.

Théorème 2.4 (Identité du carré de Durfee.) Pour $|x| < 1$,

$$\prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^m} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^{s^2}}{(1-x)^2(1-x^2)^2 \cdots (1-x^s)^2} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^{s^2}}{[(1-x)(1-x^2) \cdots (1-x^s)]^2}.$$

Démonstration. Toute partition λ de n se décompose de façon unique selon la valeur $s = d(\lambda)$ de son côté de Durfee :

- Le carré $s \times s$ contribue s^2 au poids.
- La région à droite du carré est une partition μ avec au plus s parts (car le carré a s lignes, donc la région droite a au plus s lignes).
- La région sous le carré est une partition ν avec des parts $\leq s$.

Par la Proposition ?? (point 2), la série génératrice des partitions en parts $\leq s$ est $\prod_{m=1}^s (1-x^m)^{-1}$, et par la Proposition 1.2 (conjugaison), c'est aussi la série génératrice des partitions en au plus s parts. La décomposition $\lambda = s^2 + \mu + \nu$ étant unique pour chaque s , on obtient :

$$\prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^m} = \sum_{s=0}^{\infty} x^{s^2} \cdot \prod_{m=1}^s \frac{1}{1-x^m} \cdot \prod_{m=1}^s \frac{1}{1-x^m} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^{s^2}}{[(1-x)(1-x^2) \cdots (1-x^s)]^2}.$$

□

L'identité du carré de Durfee est un exemple paradigmatique de la façon dont une décomposition géométrique d'un diagramme de Ferrers se traduit directement en une identité de séries génératrices.

Chapitre 3

La formule pentagonale d'Euler

La formule d'Euler du chapitre précédent établit que $F(x) = \prod_{m=1}^{\infty} (1 - x^m)^{-1}$. Une question naturelle se pose : quel est le développement en série du produit *réciproque* $\prod_{m=1}^{\infty} (1 - x^m)$? La réponse, entièrement non évidente, est que presque tous les coefficients sont nuls : les seuls termes non nuls apparaissent aux exposants dits *pentagonaux*, avec des signes alternés $(-1)^k$. Ce résultat, démontré par Euler lui-même, est l'une des plus belles identités de la théorie des partitions.

3.1 Nombres pentagonaux et énoncé du théorème

Définition 3.1. Les *nombres pentagonaux généralisés* sont les entiers de la forme

$$\omega(k) = \frac{k(3k-1)}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Pour $k = 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots$, on obtient la suite

$$0, 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, \dots$$

Remarque 3.1. Le nom «pentagonal» vient du fait que, pour $k \geq 1$, $\omega(k) = k(3k-1)/2$ compte le nombre de points dans un pentagone régulier de côté k (voir Figure 3.1). La formule $\omega(k) = k(3k-1)/2$ est valable pour tout $k \in \mathbb{Z}$; pour k négatif, $\omega(-k) = k(3k+1)/2$, de sorte que les nombres pentagonaux généralisés arrivent par paires $\omega(k), \omega(-k)$ pour chaque $k \geq 1$. On notera également la relation de parité $(-1)^k = (-1)^{-k}$, ce qui signifie que les deux termes $x^{\omega(k)}$ et $x^{\omega(-k)}$ d'une même paire portent le même signe dans la formule pentagonale.



FIGURE 3.1 – Les nombres pentagonaux : $\omega(1) = 1$, $\omega(2) = 5$, $\omega(3) = 12$, $\omega(4) = 22$.

Théorème 3.1 (Formule pentagonale d'Euler.) Pour $|x| < 1$, on a :

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1 - x^m) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k x^{k(3k-1)/2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(x^{k(3k-1)/2} + x^{k(3k+1)/2} \right).$$

Autrement dit :

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1 - x^m) = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \dots$$

L'identité des deux membres de la somme vient de ce que $\omega(-k) = k(3k+1)/2$, et que $(-1)^k = (-1)^{-k}$, donc les termes d'indice k et $-k$ se regroupent naturellement en $(-1)^k (x^{\omega(k)} + x^{\omega(-k)})$.

Avant de démontrer ce théorème, on peut vérifier sur les premiers termes. En développant le produit jusqu'à $m = 3$:

$$\begin{aligned} (1-x)(1-x^2)(1-x^3) &= (1-x-x^2+x^3)(1-x^3) \\ &= 1-x-x^2+x^3-x^3+x^4+x^5-x^6 \\ &= 1-x-x^2+x^4+x^5-x^6. \end{aligned}$$

Les termes en x^0, x^1, x^2, x^5 sont déjà visibles avec les bons signes; les termes en x^4 et x^6 disparaîtront quand on prend le produit infini. On verra en effet dans la preuve analytique pourquoi seuls les exposants pentagonaux subsistent.

3.2 Preuve analytique

La preuve que nous présentons ici est celle d'Euler, qui passe par des sommes auxiliaires F_n et S_n dont on montre la coïncidence, puis l'approximation du produit fini P_n .

Notations. Pour $0 \leq x < 1$ et $n \geq 1$, on pose :

$$P_n = \prod_{r=1}^n (1 - x^r), \quad P_0 = 1, \quad (3.1)$$

$$g(r) = \frac{r(r+1)}{2} \quad (r \geq 0), \quad (3.2)$$

$$F_n = \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{P_n}{P_r} x^{rn+g(r)}, \quad (3.3)$$

$$S_n = 1 + \sum_{r=1}^n (-1)^r \left(x^{w(r)} + x^{w(-r)} \right). \quad (3.4)$$

Lemme 3.1. Pour tout $n \geq 2$,

$$F_n - F_{n-1} = (-1)^n \left(x^{n(3n-1)/2} + x^{n(3n+1)/2} \right).$$

Démonstration. On part de la définition :

$$F_n - F_{n-1} = \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{P_n}{P_r} x^{rn+g(r)} - \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{P_{n-1}}{P_r} x^{r(n-1)+g(r)}.$$

- 1) Pour $r = n$, le terme est $(-1)^n \frac{P_n}{P_n} x^{n^2+g(n)} = (-1)^n x^{n^2+g(n)}$.
 2) Pour $0 \leq r \leq n-1$, on remplace $P_n = (1-x^n)P_{n-1}$ dans la première somme :

$$\sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{P_n}{P_r} x^{rn+g(r)} = \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{P_{n-1}}{P_r} x^{rn+g(r)} - \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{P_{n-1}}{P_r} x^{(r+1)n+g(r)}.$$

- 3) En rassemblant tous les termes :

$$\begin{aligned} F_n - F_{n-1} &= (-1)^n x^{n^2+g(n)} + \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{P_{n-1}}{P_r} x^{rn+g(r)} \\ &\quad - \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{P_{n-1}}{P_r} x^{(r+1)n+g(r)} - \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{P_{n-1}}{P_r} x^{r(n-1)+g(r)}. \end{aligned}$$

On combine la première et la troisième somme et on note que le terme $r = 0$ s'annule.

$$\sum_{r=1}^{n-1} (-1)^r \frac{P_{n-1}}{P_r} (x^{rn+g(r)} - x^{r(n-1)+g(r)}) = \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^r \frac{P_{n-1}}{P_r} x^{r(n-1)+g(r)} (x^r - 1).$$

Or $\frac{x^r-1}{P_r} = \frac{-(1-x^r)}{P_r} = -\frac{1}{P_{r-1}}$ pour $r \geq 1$ (le facteur $(1-x^r)$ se simplifie avec $P_r = P_{r-1}(1-x^r)$).
 On obtient donc,

$$- \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^r \frac{P_{n-1}}{P_{r-1}} x^{r(n-1)+g(r)}.$$

La deuxième somme, après décalage $r \rightarrow r-1$, est $\sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \frac{P_{n-1}}{P_{r-1}} x^{rn+g(r-1)}$. Ainsi,

$$F_n - F_{n-1} = (-1)^n x^{n^2+g(n)} - \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^r \frac{P_{n-1}}{P_{r-1}} x^{r(n-1)+g(r)} - \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \frac{P_{n-1}}{P_{r-1}} x^{rn+g(r-1)}$$

Comme, $r(n-1) + g(r) = rn + g(r-1)$, donc ces deux dernières sommes s'annulent terme à terme sauf pour $r = n$ dans la deuxième, et on obtient,

$$F_n - F_{n-1} = (-1)^n (x^{n^2+g(n)} + x^{n^2+g(n-1)}).$$

- 4) On vérifie :

$$n^2 + g(n) = n^2 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(3n+1)}{2} = \omega(-n),$$

$$n^2 + g(n-1) = n^2 + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2} = \omega(n).$$

Donc :

$$F_n - F_{n-1} = (-1)^n (x^{\omega(n)} + x^{\omega(-n)}) = (-1)^n (x^{n(3n-1)/2} + x^{n(3n+1)/2}).$$

□

Lemme 3.2. Pour tout $n \geq 0$, $F_n = S_n$.

Démonstration. On procède par récurrence sur n .

Initialisation : Pour $n = 0$: $F_0 = (-1)^0 \frac{P_0}{P_0} x^0 = 1 = S_0$.

Pour $n = 1$:

$$F_1 = \frac{P_1}{P_0} x^0 - \frac{P_1}{P_1} x^{1+1} = (1-x) - x^2 = 1 - x - x^2.$$

Or $\omega(1) = 1$ et $\omega(-1) = 2$, donc $S_1 = 1 + (-1)^1(x^1 + x^2) = 1 - x - x^2 = F_1$.

Hérédité : Supposons $F_{n-1} = S_{n-1}$. D'après le Lemme 3.1 :

$$F_n = F_{n-1} + (-1)^n \left(x^{n(3n-1)/2} + x^{n(3n+1)/2} \right) = S_{n-1} + (S_n - S_{n-1}) = S_n.$$

□

Lemme 3.3. Pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in [0, 1)$,

$$|S_n - P_n| \leq n x^{n+1}.$$

Démonstration. D'après le Lemme 3.2, $S_n = F_n$, donc

$$F_n - P_n = \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{P_n}{P_r} x^{rn+g(r)} - P_n = \sum_{r=1}^n (-1)^r \frac{P_n}{P_r} x^{rn+g(r)},$$

car le terme $r = 0$ vaut $P_n/P_0 \cdot x^0 = P_n$, qui s'annule avec $-P_n$.

Pour $0 < x < 1$, on a $0 < P_n/P_r \leq 1$ (puisque $P_n \leq P_r$ pour $r \leq n$, les facteurs supplémentaires $(1 - x^{r+1}) \cdots (1 - x^n)$ étant ≤ 1). De plus, $rn + g(r) = rn + r(r+1)/2 \geq n+1$ pour $r \geq 1$ (le minimum est atteint en $r = 1 : n+1$). Donc :

$$|S_n - P_n| = \left| \sum_{r=1}^n (-1)^r \frac{P_n}{P_r} x^{rn+g(r)} \right| \leq \sum_{r=1}^n \frac{P_n}{P_r} x^{rn+g(r)} \leq \sum_{r=1}^n x^{n+1} = n x^{n+1}.$$

□

Preuve du théorème

Démonstration. Pour $x \in [0, 1)$, on a $P_n \rightarrow \prod_{m=1}^{\infty} (1 - x^m)$ (convergence établie au Chapitre 2, Corollaire 2.1). Par le Lemme 3.3 :

$$|P_n - S_n| \leq n x^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \prod_{m=1}^{\infty} (1 - x^m)$. Or, par définition de S_n ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(x^{k(3k-1)/2} + x^{k(3k+1)/2} \right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k x^{k(3k-1)/2}.$$

Cela établit l'identité pour $x \in [0, 1)$, puis sur tout le disque $|x| < 1$ par prolongement analytique, les deux membres étant analytiques sur ce disque. □

3.3 Preuve combinatoire : l'involution de Franklin

La preuve de Franklin (1881) est de nature entièrement combinatoire. Elle établit que, pour tout n qui n'est pas un nombre pentagonal généralisé, les partitions de n en un nombre pair de parts distinctes et les partitions de n en un nombre impair de parts distinctes sont en bijection. Pour les nombres pentagonaux généralisés, il reste une partition non appariée, dont la contribution est $(-1)^k$. On considère maintenant la fonction de partition engendrée par le produit $\prod (1 - x^m)$,

réciproque de la série génératrice de $p(n)$. On écrit

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1 - x^m) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a(n) x^n.$$

Pour exprimer $a(n)$ comme une fonction de partition, remarquons que chaque partition de n en parts distinctes produit un terme x^n au membre de droite avec un coefficient $+1$ ou -1 . Le coefficient est $+1$ si x^n est produit d'un nombre pair de facteurs, et -1 sinon. Par conséquent,

$$a(n) = p_e(n) - p_o(n),$$

où $p_e(n)$ est le nombre de partitions de n en un nombre *pair* de parts distinctes, et $p_o(n)$ le nombre de partitions de n en un nombre *impair* de parts distinctes. La formule pentagonale revient à montrer que $p_e(n) - p_o(n) = (-1)^k$ si $n = \omega(k)$, et 0 sinon.

Définition des paramètres b et s . Soit λ une partition de n en parts distinctes, représentée par son diagramme de Ferrers (parts en ordre décroissant, alignées à gauche). On définit :

- la **base** $b \geq 1$: nombre de points sur la dernière ligne (la plus petite part) ;
- la **pen**te $s \geq 1$: longueur du segment diagonal partant du dernier point de la première ligne vers le bas à gauche (nombre de points dans la diagonale descendante depuis l'angle supérieur droit).

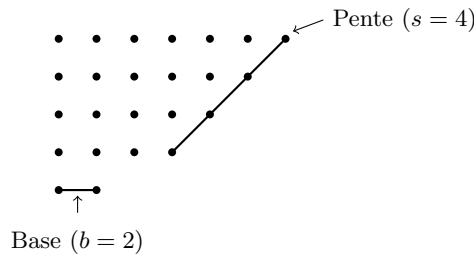


FIGURE 3.2 – Diagramme de la partition $(7, 6, 5, 4, 2)$ de 24, avec $b = 2$ et $s = 4$.

Définition des opérations A et B .

- **Opération A** : on déplace les b points de la base en les ajoutant un par un à la diagonale (la pente), prolongeant celle-ci vers le haut. Le nombre de parts *diminue* de 1 (la dernière ligne disparaît).
- **Opération B** : on déplace les s points de la pente en les ajoutant en bas du diagramme pour former une nouvelle ligne. Le nombre de parts *augmente* de 1.



FIGURE 3.3 – Les opérations A et B appliquées à la partition $(7, 6, 5, 4, 2)$ de 24.

Admissibilité des opérations. Une opération est *admissible* si le diagramme résultant est encore en forme standard (parts distinctes, ordre décroissant).

On distingue trois cas selon la relation entre b et s :

Cas 1 : $b < s$. L'opération A est admissible : $b \leq s - 1$. L'opération B n'est pas admissible : créer une nouvelle ligne de s points détruirait la stricte décroissance (la nouvelle ligne aurait autant de points que la pente atteint).

Cas 2 : $b = s$ et la base et la pente ne se chevauchent pas. L'opération A est admissible. L'opération B n'est pas admissible (même raison que le cas 1).

Cas 3 : $b > s$. L'opération B est admissible : les s points de la pente forment une nouvelle ligne plus petite que toutes les lignes existantes. L'opération A n'est pas admissible.

Les deux exceptions. Il existe exactement deux situations où *ni A ni B* n'est admissible.

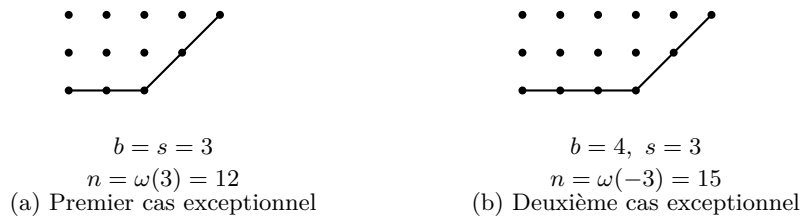


FIGURE 3.4 – Les deux cas exceptionnels pour $k = 3$.

Premier cas exceptionnel : $b = s = k$ et la pente atteint la base (les deux se croisent). Dans ce cas, le diagramme est constitué exactement des k lignes de longueurs $k, k + 1, \dots, 2k - 1$, d'où :

$$n = k + (k + 1) + \dots + (2k - 1) = \frac{k(3k - 1)}{2} = \omega(k).$$

L'opération A produirait une ligne doublée, donc n'est pas admissible. L'opération B produirait une ligne de longueur $k - 1$ qui serait inférieure à la dernière ligne de longueur k après suppression de la pente donc n'est pas admissible.

Deuxième cas exceptionnel : $b = s + 1$ et la pente atteint la base. Ici le diagramme a k lignes de longueurs $k + 1, k + 2, \dots, 2k$, d'où :

$$n = (k + 1) + (k + 2) + \dots + 2k = \frac{k(3k + 1)}{2} = \omega(-k).$$

Conclusion de la preuve. En dehors des deux cas exceptionnels, exactement une des opérations A ou B est admissible, et elle change la parité du nombre de parts. On obtient ainsi une involution φ sur l'ensemble $\mathcal{D}(n) \setminus \{\lambda_{\text{exc}}\}$ qui apparie chaque partition en un nombre pair de parts avec une partition en un nombre impair de parts : donc $p_e(n) = p_o(n)$.

Pour $n = \omega(k)$ (premier cas), il reste une partition non appariée $(k, k + 1, \dots, 2k - 1)$ qui a k parts. Pour $n = \omega(-k)$ (second cas), il reste la partition $(k + 1, k + 2, \dots, 2k)$, qui a aussi k parts. Dans les deux cas, $p_e(n) - p_o(n) = (-1)^k$.

Pour tout autre entier n , toutes les partitions sont appariées, donc $p_e(n) - p_o(n) = 0$. Ceci établit la formule pentagonale. \square

3.4 Formule de récurrence pour $p(n)$

La formule pentagonale a une conséquence algorithmique remarquable : elle permet de calculer $p(n)$ par une récurrence ne faisant intervenir que $O(\sqrt{n})$ valeurs précédentes. C'est par cette récurrence que MacMahon calcula $p(n)$ jusqu'à $n = 200$.

Théorème 3.2 (Récurrence d'Euler.) Pour tout entier $n \geq 1$,

$$p(n) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left[p\left(n - \frac{k(3k-1)}{2}\right) + p\left(n - \frac{k(3k+1)}{2}\right) \right],$$

avec la convention $p(m) = 0$ pour $m < 0$. La somme est finie car $\omega(k) = k(3k-1)/2 > n$ pour k assez grand.

Démonstration. La série génératrice des partitions est

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^m}.$$

En multipliant les deux membres par $\prod_{m=1}^{\infty} (1-x^m)$, on obtient :

$$1 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n \right) \cdot \left(\prod_{m=1}^{\infty} (1-x^m) \right).$$

D'après la formule pentagonale (Théorème 3.1), le second facteur vaut $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k x^{\omega(k)}$. En posant $b_m = (-1)^k$ si $m = \omega(k)$ pour un $k \in \mathbb{Z}$, et $b_m = 0$ sinon, on peut écrire :

$$1 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n \right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m \right).$$

Le produit de Cauchy donne, pour le coefficient de x^n (avec $n \geq 1$) :

$$0 = \sum_{j=0}^n p(j) b_{n-j} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k p(n - \omega(k)),$$

la somme étant finie car $b_{n-j} \neq 0$ seulement si $n-j = \omega(k)$ pour un certain k , et dès que $\omega(k) > n$, les arguments sont négatifs et p y vaut 0 par convention.

Le terme $k=0$ donne $b_0 = 1$ et $\omega(0) = 0$, donc il contribue $p(n)$. En séparant ce terme :

$$0 = p(n) + \sum_{k \neq 0} (-1)^k p(n - \omega(k)),$$

d'où :

$$p(n) = \sum_{k \neq 0} (-1)^{k+1} p(n - \omega(k)).$$

On regroupe les termes k et $-k$ pour $k \geq 1$. L'exposant associé à $-k$ est :

$$\omega(-k) = \frac{(-k)(3(-k)-1)}{2} = \frac{k(3k+1)}{2}.$$

Comme $(-1)^{-k+1} = (-1)^{k+1}$, les termes k et $-k$ contribuent :

$$(-1)^{k+1} \left[p\left(n - \frac{k(3k-1)}{2}\right) + p\left(n - \frac{k(3k+1)}{2}\right) \right].$$

□

Exemple 3.1. On calcule les premières valeurs de $p(n)$ en utilisant la récurrence d'Euler. Les nombres pentagonaux généralisés pour $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ sont :

$$\omega(\pm 1) = 1, 2, \quad \omega(\pm 2) = 5, 7, \quad \omega(\pm 3) = 12, 15, \quad \omega(\pm 4) = 22, 26, \dots$$

On pose $p(0) = 1$ et $p(m) = 0$ pour $m < 0$. La récurrence donne, en ne gardant que les termes dont l'argument est ≥ 0 :

$$\begin{aligned} p(1) &= p(0) = 1 \\ p(2) &= p(1) + p(0) = 2 \\ p(3) &= p(2) + p(1) = 3 \\ p(4) &= p(3) + p(2) = 5 \\ p(5) &= p(4) + p(3) - p(0) = 5 + 3 - 1 = 7 \\ p(6) &= p(5) + p(4) - p(1) = 7 + 5 - 1 = 11 \\ p(7) &= p(6) + p(5) - p(2) - p(0) = 11 + 7 - 2 - 1 = 15 \\ p(8) &= p(7) + p(6) - p(3) - p(1) = 15 + 11 - 3 - 1 = 22 \\ p(9) &= p(8) + p(7) - p(4) - p(2) = 22 + 15 - 5 - 2 = 30 \\ p(10) &= p(9) + p(8) - p(5) - p(3) = 30 + 22 - 7 - 3 = 42. \end{aligned}$$

On retrouve ainsi les premières valeurs de la fonction de partition.

La récurrence précédente permet de calculer successivement les valeurs $p(0), p(1), \dots, p(N)$. Pour calculer $p(n)$, seuls les termes associés aux nombres pentagonaux généralisés inférieurs ou égaux à n interviennent. Le nombre de termes utilisés est donc de l'ordre de \sqrt{n} . On obtient ainsi un algorithme de complexité $O(N\sqrt{N})$.

eulerr.py

```

1 def euler_pentagonal(N):
2     """Remplit p[0..N] par la formule pentagonale."""
3     p = [0] * (N + 1)
4     p[0] = 1
5     for n in range(1, N + 1):
6         total = 0
7         k = 1
8         while True:
9             w1 = k * (3 * k - 1) // 2 # omega(k)
10            w2 = k * (3 * k + 1) // 2 # omega(-k)
11            if w1 > n:
12                break
13            sign = 1 if k % 2 == 1 else -1
14            total += sign * p[n - w1]
15            if w2 <= n:
16                total += sign * p[n - w2]
17            k += 1
18            p[n] = total
19     return p

```

On obtient notamment

$$p(10) = 42, \quad p(100) = 190\,569\,292, \quad p(200) = 3\,972\,999\,029\,388.$$

Ces valeurs coïncident avec celles calculées par MacMahon puis vérifiées par Hardy et Ramanujan à l'aide de leur formule asymptotique. C'est précisément ce que souligne la remarque suivante.

Chapitre 4

Comportement asymptotique de $p(n)$

Les chapitres précédents ont fourni une série génératrice et une récurrence pour $p(n)$, mais aucune information directe sur son *ordre de grandeur*. On sait que $p(n)$ croît très vite : $p(100) = 190\,569\,292$, $p(200) = 3\,972\,999\,029\,388$, mais à quelle vitesse exactement ?

Ce chapitre établit deux encadrements successifs : d'abord un encadrement élémentaire en puissances de n , puis un encadrement exponentiel bien plus précis, qui permet de déterminer la limite de $\log p(n)/\sqrt{n}$. C'est ce dernier résultat, dû à **Hardy** et **Ramanujan** (1918), que nous établissons ici par une méthode élémentaire.

4.1 Encadrements élémentaires de $p(n)$

Théorème 4.1. Pour tout entier $n > 1$,

$$2^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} < p(n) < n^{3\lfloor \sqrt{n} \rfloor}.$$

Démonstration. Posons $r = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ pour alléger les notations.

Borne inférieure. Pour tout sous-ensemble $\{a_1, \dots, a_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, r\}$, on forme la partition

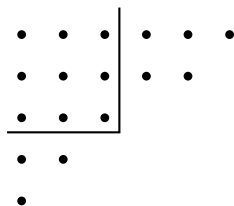
$$n = a_1 + \dots + a_k + (n - a_1 - \dots - a_k).$$

Ce découpage est valide car

$$a_1 + \dots + a_k \leq 1 + 2 + \dots + r = \frac{r(r+1)}{2} \leq r^2 \leq n,$$

donc le dernier terme $n - a_1 - \dots - a_k \geq 0$. Chacun des 2^r sous-ensembles de $\{1, \dots, r\}$ (y compris le sous-ensemble vide, qui donne la partition réduite à n) produit ainsi une partition distincte de n . Donc $p(n) \geq 2^r = 2^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}$.

Borne supérieure. On considère le diagramme de Ferrers d'une partition quelconque de n et l'on repère le plus grand carré $r' \times r'$ contenu dans son coin supérieur gauche (le *carré de Durfee*, introduit au Chapitre 2).



La taille r' du carré de Durfee vérifie $r' \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor = r$, car $r'^2 \leq n$. Le diagramme se décompose en trois parties :

- le carré $r' \times r'$ lui-même ;
- la région à *droite* du carré : une partition en au plus r' parts, chacune $\leq n - r'^2$, donc au plus $n^{r'}$ choix ;
- la région *sous* le carré : une partition en parts $\leq r'$, donc (par conjugaison, Proposition 1.2) au plus $n^{r'}$ choix.

Pour un r' fixé, il y a donc au plus $n^{r'} \times n^{r'} = n^{2r'}$ partitions. En sommant sur $r' = 1, \dots, r$:

$$p(n) \leq \sum_{r'=1}^r n^{2r'} < r \cdot n^{2r} \leq \sqrt{n} \cdot n^{2\sqrt{n}} < n^{3\lfloor \sqrt{n} \rfloor}.$$

□

Remarque 4.1. Cet encadrement montre que $p(n)$ croît au plus comme une puissance de n à exposant $3\sqrt{n}$, et au moins comme $2^{\sqrt{n}}$. En particulier, $\log p(n) = O(\sqrt{n} \log n)$. Cependant, il ne suffit pas pour déterminer le comportement exact de $\log p(n)/\sqrt{n}$, ce qui nécessite l'encadrement exponentiel de la section suivante.

4.2 Outils préliminaires

Avant d'établir l'encadrement exponentiel, on rassemble quatre résultats techniques qui seront utilisés dans les preuves des théorèmes principaux.

Théorème 4.2. Pour tout $n \geq 1$,

$$n p(n) = \sum_{lk \leq n} l p(n - lk).$$

Démonstration. Pour $|x| < 1$, la formule d'Euler donne $f(x) = \prod_{m=1}^{+\infty} (1 - x^m)^{-1} = \sum_{l \geq 0} p(l) x^l$. En calculant sa dérivée logarithmique :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l x^{l-1}}{1 - x^l} = \frac{1}{x} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l x^l}{1 - x^l} = \frac{1}{x} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} l x^{lk},$$

où l'on a utilisé $\frac{x^l}{1-x^l} = \sum_{k=1}^{\infty} x^{lk}$. Donc $f'(x) = \frac{f(x)}{x} \sum_{l,k \geq 1} l x^{lk}$, soit :

$$x f'(x) = f(x) \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} l x^{lk}.$$

Or, $x f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n p(n) x^n$. Le produit de Cauchy du membre droit donne :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n p(n) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{v \geq 0, l \geq 1, k \geq 1 \\ v+lk=n}} l \cdot p(v) \right) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{lk \leq n} l p(n - lk) \right) x^n.$$

Le résultat s'ensuit par identification des coefficients. □

Théorème 4.3. Pour $n > v > 0$,

$$\frac{v}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-v} < \frac{v}{2\sqrt{n}} + \frac{v^2}{2n^{3/2}}.$$

Démonstration. Cela découle de l'inégalité

$$1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} < (1-x)^{\frac{1}{2}} < 1 - \frac{x}{2}, \quad \forall x \in]0, 1[.$$

En posant $x = \frac{v}{n}$ on a donc,

$$\sqrt{n} \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \right) < \sqrt{n} \cdot \sqrt{1-x} < \sqrt{n} \left(1 - \frac{x}{2} \right)$$

$$\sqrt{n} - \frac{x}{2}\sqrt{n} - \frac{x^2}{2}\sqrt{n} < \sqrt{n-x} < \sqrt{n} - \frac{x}{2}\sqrt{n}$$

$$\sqrt{n} - \frac{1}{2} \frac{v}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2} \frac{v^2}{n^{3/2}} < \sqrt{n-v} < \sqrt{n} - \frac{1}{2} \frac{v}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{1}{2} \frac{v}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} < -\sqrt{n-v} < \frac{1}{2} \frac{v}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{n^{3/2}} - \sqrt{n}$$

$$\frac{1}{2} \frac{v}{\sqrt{n}} + \sqrt{n} < \sqrt{n} - \sqrt{n-v} < \frac{1}{2} \frac{v}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{n^{3/2}} + \sqrt{n}$$

$$\frac{1}{2} \frac{v}{\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-v} < \frac{1}{2} \frac{v}{\sqrt{n}} + \frac{v^2}{2n^{3/2}}$$

□

Théorème 4.4. Pour $0 < x < 1$, il existe une constante $c_1 > 0$ telle que

$$\frac{1}{x^2} - c_1 < \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} < \frac{1}{x^2}.$$

Démonstration. On remarque que

$$\frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} = \frac{1}{(e^{x/2} - e^{-x/2})^2}.$$

Inégalité de droite : On montre que $e^{x/2} - e^{-x/2} > x$ pour tout $x \in]0, 1[$.

On pose $f(x) = e^{x/2} - e^{-x/2} - x$, pour $x \in [0, 1]$. La fonction f est \mathcal{C}^∞ sur $[0, 1]$ car composée de fonctions exponentielles. On applique la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 en 0 : il existe $\xi \in]0, x[$ tel que

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(\xi)}{6}x^3.$$

On calcule $f(0) = 0$, puis $f'(x) = \frac{1}{2}e^{x/2} + \frac{1}{2}e^{-x/2} - 1$, donc, $f'(0) = 0$, puis $f''(0) = 0$, car $f''(x) = \frac{1}{4}e^{x/2} - \frac{1}{4}e^{-x/2}$, et enfin,

$$f'''(x) = \frac{1}{8}e^{x/2} + \frac{1}{8}e^{-x/2} > 0 \quad \text{pour tout } x \in]0, 1[.$$

On obtient donc,

$$f(x) = \frac{f'''(\xi)}{6}x^3 > 0.$$

Ainsi, $e^{x/2} - e^{-x/2} > x$, et en inversant puis en prenant le carré,

$$\frac{1}{(e^{x/2} - e^{-x/2})^2} < \frac{1}{x^2}, \text{ pour tout } x \in]0, 1[.$$

Inégalité de gauche : On pose $g(x) = e^{x/2} - e^{-x/2}$. La fonction g est \mathcal{C}^∞ sur $[0, 1]$. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 en 0 : il existe $\xi \in]0, x[$ tel que

$$g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + \frac{g'''(\xi)}{6}x^3.$$

On calcule $g(0) = 0$, puis $g'(x) = \frac{1}{2}e^{x/2} + \frac{1}{2}e^{-x/2}$, donc $g'(0) = 1$, puis $g''(x) = \frac{1}{4}e^{x/2} - \frac{1}{4}e^{-x/2}$, donc $g''(0) = 0$, et enfin,

$$g'''(x) = \frac{1}{8}e^{x/2} + \frac{1}{8}e^{-x/2}.$$

Donc :

$$g(x) = x + \frac{g'''(\xi)}{6}x^3.$$

Puisque $\xi \in]0, x[\subset]0, 1[$, on peut donc borner $g'''(\xi)$,

$$0 < g'''(\xi) \leq g'''(1) = \frac{1}{8}(e^{1/2} + e^{-1/2}) \leq \frac{e^{1/2}}{4}.$$

On obtient ainsi,

$$x < g(x) \leq x \left(1 + \frac{e^{1/2}}{24} x^2 \right).$$

En inversant puis en élevant au carré,

$$\frac{1}{g(x)^2} \geq \frac{1}{x^2 \left(1 + \frac{e^{1/2}}{24} x^2 \right)^2}.$$

Or pour tout $u \geq 0$, on a $\frac{1}{(1+u)^2} \geq 1 - 2u$. En appliquant ceci avec $u = \frac{e^{1/2}}{24} x^2$,

$$\frac{1}{g(x)^2} \geq \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{e^{1/2}}{12} x^2 \right) = \frac{1}{x^2} - \frac{e^{1/2}}{12}.$$

En posant $c_1 = \frac{\sqrt{e}}{12} > 0$, on obtient :

$$\frac{1}{(e^{x/2} - e^{-x/2})^2} > \frac{1}{x^2} - c_1.$$

□

Théorème 4.5. Soit $\alpha > 0$. Il existe une constante $c_2 = c_2(\alpha) > 0$ telle que, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{\pi^2 n}{6\alpha^2} - c_2 \sqrt{n} < \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} l e^{-\alpha k l / \sqrt{n}} < \frac{\pi^2 n}{6\alpha^2}.$$

Démonstration. En posant $x = e^{-\alpha k / \sqrt{n}} \in (0, 1)$ et en utilisant $\sum_{l=1}^{\infty} l x^l = \frac{x}{(1-x)^2}$, on obtient :

$$\sum_{l=1}^{\infty} l e^{-\alpha k l / \sqrt{n}} = \frac{e^{-\alpha k / \sqrt{n}}}{(1 - e^{-\alpha k / \sqrt{n}})^2}.$$

D'après le Théorème 4.4 appliqué avec $x = \alpha k/\sqrt{n}$:

$$\frac{n}{\alpha^2 k^2} - c_1 < \frac{e^{-\alpha k/\sqrt{n}}}{(1 - e^{-\alpha k/\sqrt{n}})^2} < \frac{n}{\alpha^2 k^2}.$$

Borne supérieure : En sommant sur $k \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha k/\sqrt{n}}}{(1 - e^{-\alpha k/\sqrt{n}})^2} < \frac{n}{\alpha^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2 n}{6\alpha^2}.$$

Borne inférieure : On scinde la somme en Σ_1 (termes $k \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$) et Σ_2 (termes $k > \lfloor \sqrt{n} \rfloor$). Pour $k \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, on a $\alpha k/\sqrt{n} \leq \alpha$, donc le Théorème 4.4 s'applique :

$$\Sigma_1 > \frac{n}{\alpha^2} \sum_{k=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{1}{k^2} - c_1 \lfloor \sqrt{n} \rfloor.$$

Or $\sum_{k=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k > \sqrt{n}} \frac{1}{k^2}$, et le reste vérifie $\sum_{k > \sqrt{n}} \frac{1}{k^2} \leq \int_{\sqrt{n}}^{\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{\sqrt{n}}$, donc $n \sum_{k > \sqrt{n}} \frac{1}{k^2} = O(\sqrt{n})$. Comme $c_1 \lfloor \sqrt{n} \rfloor = O(\sqrt{n})$, on obtient :

$$\Sigma_1 > \frac{\pi^2 n}{6\alpha^2} - c_3 \sqrt{n}$$

pour une constante $c_3 > 0$.

Pour Σ_2 , la borne supérieure du Théorème 4.4 donne :

$$0 < \Sigma_2 < \frac{n}{\alpha^2} \sum_{k > \sqrt{n}} \frac{1}{k^2} = O(\sqrt{n}).$$

En rassemblant : $\Sigma_1 + \Sigma_2 > \frac{\pi^2 n}{6\alpha^2} - c_2 \sqrt{n}$ pour c_2 assez grand. □

4.3 Encadrements exponentiels de $p(n)$

On établit maintenant les deux inégalités exponentielles :

$$\frac{1}{A} e^{(c-\varepsilon)\sqrt{n}} \leq p(n) \leq e^{c\sqrt{n}}, \quad c = \pi \sqrt{\frac{2}{3}},$$

qui constituent le coeur de la preuve du théorème asymptotique.

Théorème 4.6. *Pour tout $n \geq 1$, $p(n) < e^{c\sqrt{n}}$, où $c = \pi \sqrt{2/3}$.*

Démonstration. On procède par récurrence sur n .

Initialisation : Pour $n = 1$: $p(1) = 1 < e^c = e^{\pi \sqrt{2/3}}$.

Hérédité : Supposons $p(m) < e^{c\sqrt{m}}$ pour tout $m < n$. D'après le Théorème 4.2 et l'hypothèse de récurrence :

$$n p(n) = \sum_{lk \leq n} l p(n - lk) < \sum_{lk \leq n} l e^{c\sqrt{n-lk}}.$$

D'après le Théorème 4.3 (borne supérieure avec $v = lk$ et $c\sqrt{n-lk} < c\sqrt{n} - \frac{clk}{2\sqrt{n}}$) :

$$np(n) < \sum_{lk \leq n} l e^{c\sqrt{n}-clk/(2\sqrt{n})} \leq e^{c\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} l e^{-clk/(2\sqrt{n})}.$$

D'après le Théorème 4.5 (borne supérieure avec $\alpha = c/2$) :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} l e^{-clk/(2\sqrt{n})} < \frac{\pi^2 n}{6(c/2)^2} = \frac{4\pi^2 n}{6c^2} = \frac{2\pi^2 n}{3c^2}.$$

Or $c = \pi\sqrt{2/3}$ implique $c^2 = 2\pi^2/3$, donc $\frac{2\pi^2}{3c^2} = \frac{2\pi^2}{3 \cdot 2\pi^2/3} = 1$. Ainsi :

$$np(n) < e^{c\sqrt{n}} \cdot n,$$

d'où $p(n) < e^{c\sqrt{n}}$. □

Remarque 4.2. Le choix $c = \pi\sqrt{2/3}$ n'est pas arbitraire : c'est la seule valeur pour laquelle la majoration se referme, i.e. telle que $\pi^2/(6(c/2)^2) = 1$. Cette même valeur réapparaît dans la formule asymptotique de Hardy-Ramanujan, ce qui explique *a posteriori* ce choix.

Théorème 4.7. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A = A(\varepsilon) > 0$ tel que, pour tout $n \geq 1$,

$$p(n) > \frac{1}{A} e^{(c-\varepsilon)\sqrt{n}}.$$

Démonstration. 1) On procède par récurrence sur n , mais le choix de A ne sera précisé que plus tard. Soit $\varepsilon > 0$, alors d'après le théorème 4.2 et l'hypothèse de récurrence, on voit que

$$np(n) = \sum_{lk \leq n} lp(n-lk) > \sum_{lk \leq n} l \frac{1}{A} e^{(c-\varepsilon)\sqrt{n-lk}}.$$

2) On utilise le théorème 4.4 avec $v = lk$, donc on a, $\sqrt{n} - \sqrt{n-lk} < \frac{lk}{2\sqrt{n}} + \frac{l^2 k^2}{2n^{3/2}}$, donc $\sqrt{n-lk} > \sqrt{n} - \frac{lk}{2\sqrt{n}} - \frac{l^2 k^2}{2n^{3/2}}$. Ainsi on a :

$$e^{(c-\varepsilon)\sqrt{n-lk}} > e^{(c-\varepsilon)\sqrt{n}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(c-\varepsilon)lkn^{-1/2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(c-\varepsilon)l^2 k^2 n^{-3/2}}.$$

3) On factorise par $e^{(c-\varepsilon)\sqrt{n}}$ et donc,

$$np(n) > \frac{1}{A} e^{(c-\varepsilon)\sqrt{n}} \sum_{lk \leq n} l e^{-\frac{1}{2}(c-\varepsilon)lkn^{-1/2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(c-\varepsilon)l^2 k^2 n^{-3/2}}$$

4) Puisque $e^{-x} \geq 1 - x$, on a donc $e^{-\frac{1}{2}(c-\varepsilon)l^2 k^2 n^{-3/2}} \geq 1 - \frac{1}{2}(c-\varepsilon)l^2 k^2 n^{-3/2}$, donc

$$\begin{aligned} \sum_{lk \leq n} l e^{-\frac{1}{2}(c-\varepsilon)lkn^{-1/2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(c-\varepsilon)l^2 k^2 n^{-3/2}} &\geq \sum_{lk \leq n} l e^{-\frac{1}{2}(c-\varepsilon)lkn^{-1/2}} \left(1 - \frac{1}{2}(c-\varepsilon) \frac{l^2 k^2}{n^{3/2}}\right) \\ &= \sum_{lk \leq n} l e^{-\frac{1}{2}(c-\varepsilon)lkn^{-1/2}} - \frac{c-\varepsilon}{2n^{3/2}} \sum_{lk \leq n} k^2 l^3 e^{-\frac{1}{2}(c-\varepsilon)lkn^{-1/2}} \\ &= \Sigma_1 - \frac{c-\varepsilon}{2n^{3/2}} \Sigma_2 \quad (\text{disons}). \end{aligned}$$

5) Σ_1 : on regarde le reste $\sum_{lk > n}$. En effet, posons $x = lkn^{-1/2}$, donc quand $lk > n$, ce qui nous donne $x > \sqrt{n}$. Et pour tout $t > 0$, $e^{-\frac{1}{2}(c-\epsilon)x} \leq C.x^{-t}$ avec (C une constante positif). Ainsi, $e^{-x} = O(x^{-t})$, pour tout $t > 0$ de sorte que

$$\begin{aligned} \sum_{lk > n} l e^{-\frac{1}{2}(c-\epsilon)lkn^{-\frac{1}{2}}} &= O\left(n^{\frac{t}{2}} \sum_{lk > n} l^{1-\frac{t}{4}} k^{-\frac{1}{4}t} (lk)^{-\frac{t}{2}}\right) \\ &= O\left(n^{-\frac{t}{4}} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} l^{1-\frac{t}{4}} k^{-\frac{t}{4}}\right) = O(n^{-\frac{t}{4}}), \quad \text{si } t > 8. \end{aligned}$$

D'après cela et le Théorème 4.5, on a

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &> \frac{2\pi^2 n}{3(c-\epsilon)^2} - c_3 \sqrt{n} = \frac{2\pi^2 n}{3c^2} + \frac{2\pi^2 n}{3} \left(\frac{1}{(c-\epsilon)^2} - \frac{1}{c^2} \right) - c_3 \sqrt{n} \\ &> (1 + 2\epsilon c^{-1})n - c_3 \sqrt{n} \end{aligned}$$

(en utilisant $\frac{1}{(c-\epsilon)^2} - \frac{1}{c^2} = 2 \int_{c-\epsilon}^c x^{-3} dx > 2\epsilon c^{-3}$.)

6) Σ_2 : il faut montrer que Σ_2 ne perturbe pas le terme principal. On souhaite majorer Σ_2 et pour ça, on a besoin de la dérivée troisième de la série géométrique :

$$\sum_{l \geq 1} l^3 x^l \leq \frac{12x}{(1-x)^4} \quad \text{pour } x \in]0, 1[.$$

– En prenant, $x = e^{-\frac{1}{2}(c-\epsilon)kn^{-1/2}}$, alors,

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &= \sum_{lk \leq n} k^2 l^3 e^{-\frac{1}{2}(c-\epsilon)lkn^{-\frac{1}{2}}} \leq \sum_{k=1}^n k^2 \sum_{l=1}^{\infty} l^3 e^{-\frac{1}{2}(c-\epsilon)lkn^{-\frac{1}{2}}} \\ &\leq 12 \sum_{k=1}^n k^2 \frac{e^{-\frac{1}{2}(c-\epsilon)kn^{-\frac{1}{2}}}}{(1 - e^{-\frac{1}{2}(c-\epsilon)kn^{-\frac{1}{2}}})^4} \end{aligned}$$

– Le théorème 4.4 donne

$$\frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} \leq \frac{1}{x^2} \implies \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^4} \leq \frac{1}{(1-e^{-x})^2} * \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} \leq \frac{1}{(1-e^{-x})^2} * \frac{1}{x^2}$$

On prend $x = \frac{1}{2}(c-\epsilon)kn^{-1/2}$ alors, on a $\frac{1}{x^2} = \frac{n}{(c-\epsilon)^2 k^2} = O(\frac{n}{k^2})$. Donc,

$$\sum_{k=1}^n k^2 \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^4} = O\left(n \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1-e^{-x})^2}\right), \text{ donc, } \Sigma_2 = O\left(n \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1-e^{-\frac{1}{2}(c-\epsilon)kn^{-\frac{1}{2}}})^2}\right).$$

7) On divise la somme entre parenthèses en deux parties :

$$\sum_{k=1}^n = \sum_{k \leq \sqrt{n}} + \sum_{\sqrt{n} < k \leq n}.$$

Dans la première partie, $\frac{1}{2}(c-\epsilon)kn^{-\frac{1}{2}} < \frac{1}{2}c$, et pour $x < \frac{1}{2}c$,

$$1 - e^{-x} = \int_0^x e^{-t} dt > e^{-\frac{1}{2}c} x,$$

ce qui donne

$$\sum_{k \leq \sqrt{n}} \frac{1}{(1 - e^{-\frac{1}{2}(c-\epsilon)kn^{-\frac{1}{2}}})^2} = O\left(n \sum_{k \leq \sqrt{n}} \frac{1}{k^2}\right) = O(n).$$

Dans la seconde partie, pour $\sqrt{n} < k < n$, on a, $\frac{1}{2}(c - \varepsilon)kn^{-\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2}(c - \varepsilon)$ et

$$1 - e^{-\frac{1}{2}(c-\varepsilon)kn^{-\frac{1}{2}}} > 1 - e^{-\frac{1}{2}(c-\varepsilon)},$$

de sorte que

$$\sum_{\sqrt{n} < k \leq n} \frac{1}{(1 - e^{-\frac{1}{2}(c-\varepsilon)kn^{-\frac{1}{2}}})^2} = O\left(\sum_{k \leq n} 1\right) = O(n).$$

D'après cela, on voit que $\Sigma_2 = O(n^2)$. En regroupant on a,

$$np(n) > \frac{1}{A} e^{(c-\varepsilon)n^{\frac{1}{2}}} ((1 + 2\varepsilon c^{-1})n - c_4\sqrt{n}).$$

Quand

$$n > \left(\frac{c_4}{2\varepsilon c^{-1}}\right)^2,$$

on a

$$p(n) > \frac{1}{A} e^{(c-\varepsilon)n^{\frac{1}{2}}}.$$

Quand $n \leq c_4^2(2\varepsilon c^{-1})^{-2}$, on prend A assez grand pour que cette dernière inégalité soit vérifiée. Le théorème est ainsi démontré. \square

4.4 Le théorème asymptotique de Hardy-Ramanujan

Théorème 4.8 (Version faible de Hardy-Ramanujan, 1918.)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log p(n)}{\sqrt{n}} = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Démonstration. Les Théorèmes 4.6 et 4.7 fournissent, pour tout $\varepsilon > 0$, l'encadrement :

$$\frac{1}{A} e^{(c-\varepsilon)\sqrt{n}} \leq p(n) \leq e^{c\sqrt{n}}.$$

En prenant le logarithme :

$$(c - \varepsilon)\sqrt{n} - \log A \leq \log p(n) \leq c\sqrt{n}.$$

En divisant par \sqrt{n} :

$$(c - \varepsilon) - \frac{\log A}{\sqrt{n}} \leq \frac{\log p(n)}{\sqrt{n}} \leq c.$$

Comme $\log A/\sqrt{n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ et que $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit, le théorème des gendarmes donne :

$$\frac{\log p(n)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} c = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

\square

Ce résultat est la *version faible* du théorème de Hardy et Ramanujan. La version forte, établie dans leur article de 1918 par la *méthode du cercle* (une technique d'analyse complexe utilisant l'intégrale de Cauchy et la dissection de Farey du cercle unité), donne l'équivalent précis :

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Rademacher (1937) alla plus loin encore en obtenant une série *convergente* exacte pour $p(n)$:

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n) \sqrt{k} \frac{d}{dn} \left[\frac{\sinh((\pi/k)\sqrt{2(n-1/24)/3})}{\sqrt{n-1/24}} \right],$$

où les $A_k(n)$ sont des sommes exponentielles de Kloosterman. Par exemple, pour $n = 200$, les cinq premiers termes de cette série donnent déjà $p(200) = 3\,972\,999\,029\,388$ à moins d'un demi-entier.

Pour clore ce chapitre, on dresse le tableau des premières valeurs de $p(n)$ telles qu'elles peuvent être calculées par la récurrence du Chapitre 3, et on observe numériquement la convergence vers la limite $\pi\sqrt{2/3}$. Le tableau suivant compare $\log p(n)/\sqrt{n}$ à $c = \pi\sqrt{2/3} \approx 2,5651$:

n	$p(n)$	$\ln p(n)/\sqrt{n}$
10	42	$\approx 1,182$
20	627	$\approx 1,440$
50	204 226	$\approx 1,729$
100	190 569 292	$\approx 1,907$
200	3 972 999 029 388	$\approx 2,051$
∞	—	$\pi\sqrt{2/3} \approx 2,565$

La convergence est lente, comme attendu pour une limite logarithmique, mais la tendance vers $\pi\sqrt{2/3}$ est nette.

Conclusion

La question centrale de ce mémoire était de comprendre la fonction de partition $p(n)$: sa structure combinatoire, son calcul et sa croissance. Les diagrammes de Ferrers et la bijection de Glaisher ont mis en évidence des propriétés de symétrie (conjugaison, égalité entre parts distinctes et parts impaires). La série génératrice $F(x) = \prod (1 - x^m)^{-1}$ et la formule pentagonale ont fourni une récurrence calculant $p(n)$ en $O(\sqrt{n})$ opérations. Enfin, l'encadrement exponentiel $\frac{1}{A} e^{(c-\varepsilon)\sqrt{n}} \leq p(n) \leq e^{c\sqrt{n}}$ a conduit à l'équivalent $\log p(n) \sim \pi\sqrt{2n/3}$, par une méthode élémentaire faisant déjà apparaître la constante $c = \pi\sqrt{2/3}$ qui est au coeur de l'équivalent précis $p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)$ de Hardy et Ramanujan.

Parmi les prolongements naturels, les *congruences de Ramanujan* occupent une place de choix :

$$p(5n + 4) \equiv 0 \pmod{5}, \quad p(7n + 5) \equiv 0 \pmod{7}, \quad p(11n + 6) \equiv 0 \pmod{11}, \quad \forall n \geq 0.$$

Par exemple, $p(4) = 5$, $p(9) = 30$, $p(14) = 135$ sont tous divisibles par 5, et $p(5) = 7$, $p(12) = 77$, $p(19) = 490$ sont tous divisibles par 7. Ces identités, d'abord observées numériquement par Ramanujan, furent démontrées par Watson et Atkin, puis comprises dans le cadre général des formes modulaires par Ono et Ahlgren au tournant des années 2000.

Dans une autre direction, Rademacher (1937) raffina la méthode du cercle de Hardy et Ramanujan pour obtenir non plus un équivalent mais une série *convergente* exacte pour $p(n)$, exprimée à l'aide de sommes de Kloosterman. Enfin, la théorie des partitions entretient des liens profonds avec la combinatoire des q -séries, les algèbres de Lie affines et la physique statistique, ce qui en fait un domaine encore très actif aujourd'hui.

Bibliographie

- [1] T. M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [2] Hua Loo Keng, *Introduction to Number Theory*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1982.
- [3] G. H. Hardy, S. Ramanujan, *Asymptotic formulae in combinatory analysis*, Proceedings of the London Mathematical Society, **2**(17), 75–115, 1918.
- [4] G. E. Andrews, *The Theory of Partitions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **2**, Cambridge University Press, 1998.
- [5] H. Rademacher, *On the partition function $p(n)$* , Proceedings of the London Mathematical Society, **2**(43), 241–254, 1937.